

ベジエ法線ベクトル曲面

1 R-5

山口 泰

東京大学教養学部

1 はじめに

CAD/CAM を始めとする多くの計算機アプリケーションにおいて形状処理は中核技術の1つとなっている。特にベジエ曲線・曲面はその優れた特徴から、様々なアプリケーションで標準的に利用されている。その優れた特徴としては、変動減少性、アフィン不変性、凸包性、端点一致性などの性質がある。これに加えて、ベジエ曲線の場合には、ホドグラフが挙げられる。ホドグラフとは、曲線の接ベクトルの始点を原点に置いたときの終点の描く軌跡であり、曲線の1階微分の性質を表したものである。 n 次ベジエ曲線の場合には、ホドグラフが $n-1$ 次のベジエ曲線となることが知られている[1]。この性質は、曲線の接続問題や交点位置の探索[4]などに非常に有用である。

ベジエ曲面の場合も、曲面の u 方向および v 方向の接ベクトルの軌跡は曲線同様にベジエ曲面となることが知られている。しかし、曲面の1階微分として基本的な量である法線ベクトルは、元の曲面が $m \times n$ 次の曲面であった場合に $(2m-1) \times (2n-1)$ 次の多項式曲面になることは知られていたが[3]、その概形を得ることはできなかった。したがって、法線ベクトルの存在領域を円錐[4]や6角錐[2]などで包絡していた。本研究では、 $m \times n$ 次ベジエ曲面の法線ベクトルが $(2m-1) \times (2n-1)$ 次のベジエ曲面となことを示し、その制御点を計算する方法について述べる。

2 ベジエ法線ベクトル曲面

曲面の法線ベクトルの始点を原点に一致させたとき、ベクトルの終点が描く曲面を法線ベクトル曲面と呼ぶことにする。一般に法線ベクトルという言いと、その向きのみに注目するために正規化されたベクトルを考えることが多い。しかし、本研究では単に法線ベクトルというときには特に正規化されていないベクトルとし、正規化されたものは単位法線ベクトルと呼ぶことにする。

さて、 $m \times n$ 次のベジエ曲面 $S(u, v)$ は、 $(m+1) \times (n+1)$ 個の制御点 P_{ij} によって定められ、次のように

表現される。

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) P_{ij} \quad (1)$$

ここで $B_i^m(u)$ はバーンスタイン多項式であり、次のように定義される。

$$B_i^m(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i}$$

ただし $\binom{m}{i}$ は2項係数であり、次式で与えられる。

$$\binom{m}{i} = \frac{m!}{i!(m-i)!} u^i (1-u)^{m-i}$$

この曲面 $S(u, v)$ の u 方向の接ベクトル $S_u(u, v)$ と v 方向の接ベクトル $S_v(u, v)$ は、次式で与えられる[1]。

$$S_u(u, v) = m \sum_{K=0}^{m-1} \sum_{L=0}^n B_K^{m-1}(u) B_L^n(v) Q_{KL} \quad (2)$$

$$\text{ただし } Q_{KL} = P_{(K+1)L} - P_{KL}$$

$$S_v(u, v) = n \sum_{M=0}^m \sum_{N=0}^{n-1} B_M^m(u) B_N^{n-1}(v) R_{MN} \quad (3)$$

$$\text{ただし } R_{MN} = P_{M(N+1)} - P_{MN}$$

つまり、 $m \times n$ 次ベジエ曲面の u 方向と v 方向の接ベクトルは、それぞれ $(m-1) \times n$ 次と $m \times (n-1)$ 次のベジエ曲面となり、その制御点が $m Q_{KL}$ と $n R_{MN}$ となることを示している。

さて、曲面 $S(u, v)$ の法線ベクトル $N(u, v)$ は接ベクトル $S_u(u, v)$ と $S_v(u, v)$ の共通法線であるから、(2)式と(3)式より次のようになる。

$$\begin{aligned} N(u, v) &= S_u(u, v) \times S_v(u, v) \\ &= mn \sum_{K=0}^{m-1} \sum_{L=0}^n \sum_{M=0}^m \sum_{N=0}^{n-1} B_K^{m-1}(u) B_L^n(v) B_M^m(u) B_N^{n-1}(v) \\ &\quad Q_{KL} \times R_{MN} \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式の各項は $B_K^{m-1}(u) B_M^m(u) B_L^n(v) B_N^{n-1}(v)$ に係数をかけた形式となっており、 $(2m-1) \times (2n-1)$ 次の多

Bézier Normal Vector Surface

Yasushi Yamaguchi

College of Arts and Sciences, The University of Tokyo

3-8-1, Komaba, Muguro-ku, 153 Tokyo

項式であることがわかる。(4)式をさらに以下のように変形する。

$$N(u, v) = mn \sum_{K=0}^{m-1} \sum_{M=0}^m \sum_{L=0}^n \sum_{N=0}^{n-1} \binom{m-1}{K} \binom{m}{M} \binom{n}{L} \binom{n-1}{N} u^{K+M} (1-u)^{(2m-1)-(K+M)} v^{L+N} (1-v)^{(2n-1)-(L+N)} Q_{KL} \times R_{MN} \quad (5)$$

ここで(5)式において、 $i = K + M$ ($0 \leq i \leq 2m-1$) および $j = L + N$ ($0 \leq j \leq 2n-1$) とおくと、 $u^i (1-u)^{(2m-1)-i} v^j (1-v)^{(2n-1)-j}$ を基底とする多項式となる。このことは、(1)式で与えられる $m \times n$ 次のベジエ曲面の法線ベクトル曲面 $N(u, v)$ が、 $(2m-1) \times (2n-1)$ 次のベジエ曲面として表わせることを示している。つまり、法線ベクトル曲面は、以下の式で表現できるはずである。

$$N(u, v) = \sum_{i=0}^{2m-1} \sum_{j=0}^{2n-1} B_i^{2m-1}(u) B_j^{2n-1}(v) T_{ij} = \sum_{i=0}^{2m-1} \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{2m-1}{i} \binom{2n-1}{j} u^i (1-u)^{(2m-1)-i} v^j (1-v)^{(2n-1)-j} T_{ij} \quad (6)$$

上記の曲面をベジエ法線ベクトル曲面と呼ぶことにする。(5)式と(6)式の係数を比較すると、ベジエ法線ベクトル曲面の制御点 T_{ij} は以下のように定まる。

$$T_{ij} = \frac{mn \sum_{\substack{K+M=i \\ 0 \leq K \leq m-1 \\ 0 \leq M \leq m}} \sum_{\substack{L+N=j \\ 0 \leq L \leq n \\ 0 \leq N \leq n-1}} \binom{m-1}{K} \binom{m}{M} \binom{n}{L} \binom{n-1}{N} Q_{KL} \times R_{MN}}{\binom{2m-1}{i} \binom{2n-1}{j}} \quad (7)$$

このベジエ法線ベクトル曲面は、一般的なベジエ曲面と同様に、以下の性質を持つ。

1. 法線ベクトル曲面は制御点 T_{ij} の凸包に含まれる。したがって、原点を頂点とし制御点 T_{ij} から構成される凸多角錐は、法線ベクトルを非常に厳しく包絡する。
2. 法線ベクトル曲面は de Casteljau アルゴリズムにより任意の u_i, v_i で細分割できる。つまり、ひとたび法線ベクトル曲面の制御点 T_{ij} を求めれば、もとの曲面と独立並行に細分割できるうえ、互に対応することが保証される。

3 実行結果

図1は 4×3 次のベジエ曲面から導出された 7×5 次のベジエ法線ベクトル曲面を表示したものである。ベジエ法線ベクトル曲面の制御点を■印、制御多面体を点線、0.1刻みの等パラメータ線を実線で示している。また参考として、もとのベジエ曲面の境界曲線を xy

平面付近に描いてある。さらに0.2刻みの格子点パラメータにおける法線ベクトル $N(u_i, v_i)$ を(4)式を用いて計算し、始点を原点にそろえた上で点線で表示した。この図から(7)式で求められた制御点が、もとのベジエ曲面の法線ベクトル曲面を表現していることが確認できる。また当然のことながら、法線ベクトル曲面が制御点の張る凸包の内部に入っていることもわかる。

4 おわりに

本研究では $m \times n$ 次ベジエ曲面の法線ベクトル曲面が $(2m-1) \times (2n-1)$ 次のベジエ曲面であることを示し、さらにその制御点の算出式を導いた。また実際にプログラム化することによって、法線ベクトルを表すことを確認した。今後はベジエ法線ベクトル曲面の利用を図る予定である。

参考文献

- [1] G. Farin: "Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design", Academic Press, Third Edition (1993).
- [2] M. E. Hohmeyer: "A Surface Intersection Algorithm Based on Loop Detection", In Proc. of Symposium on Solid Modeling Foundations and CAD/CAM Applications, pp.197-207, ACM Press (1991).
- [3] M. E. Hohmeyer: "Robust and Efficient Surface Intersection for Solid Modeling", PhD Thesis, University of California Berkeley (1992).
- [4] T. W. Sederberg and R. J. Meyers: "Loop Detection in Surface Patch Intersections", Computer Aided Geometric Design, Vol.5, No.2, pp. 161-171 (1988).

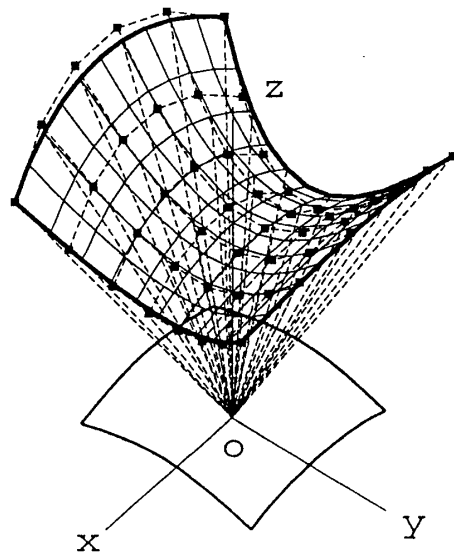


図1: ベジエ法線ベクトル曲面.