

数学 I C A I システムにおける演習問題の生成

3Q-7

出口幸子* 小原啓義**

*攻玉社工科短期大学 **早稲田大学理工学部

1. はじめに

筆者らは、工科系短期大学において、学生の数学の基礎学力を向上させることを目標とした I C A I システムについて検討している [1]。学生が微分の公式を適用する際に式変形を誤る例を抽出し、それらの一部が、演算子と被演算数の空間的な配置により引き起こされたものであると解析した。今回は、数式変形の演習問題を生成するために、数式の空間的構造の変形規則と論理的な制約条件について検討した。

2. 数式の空間的構造

前回検討した通り、数式中の演算子と被演算数の空間的な配置を記号的に表現した。中心をC、上部をT、下部をB、右側をR、左側をL、右上をRT、左側と上部をLOTとし、木構造の内部節点にこれらの記号をラベル付けすることにより、数式の空間的な構造を表現した。例えば、 $a(b+c)$ の木は、根の子がLとR、レベル1の節点Lの子がa、レベル1の節点Rの子がLとCとR、レベル2の各節点LとCとRの子がそれぞれbと+とcと表現される。なお、括弧の表現は省略した。

木構造の各レベルにおける空間的な関係に着目すると、 $a(b+c)$ は、レベル1でL-Rの関係、レベル2でL-C-Rの関係にある。今回検討の対象とした関係は、{L-R, L-C-R, T-C-B, C-R, LOT-C} — (i) である。子に関係を持てる節点は、L、R、T、B、RT、およびC-RとLOT-CのCとした。

前回抽出した式変形の例は、次の2つのメタルールで記述できる。

- (1) レベル n の関係に、ある関係を追加する。
 - (2) レベル n の関係とレベル $n+1$ の関係を反転する。
- (1) に関しては、親の関係は T-C-B に限られ、T と

Bの子に (i) の中の1つの関係がそれぞれ追加される。

例えばL-Rの関係が追加されると、 $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ あるいは、

$\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}$ となる。9通りの変形規則を生成した。

(2) に関しては、親の関係と子との関係は (i) から独立に選ぶことができる。反転のパターンは、式の木の色により6通り存在する。例えば、L-Rの関係とL-C-Rの関係が反転する場合、次のようになる：

$$(2.1) a(c W d) = (a c) W(a d)$$

$$(2.2) (a V b) c = (a c) V(b c)$$

$$(2.3) (a V b)(c V d) = (a c) V(b d)$$

$$(2.4) a(c W d) = c W(a d)$$

$$(2.5) (a V b) c = (a c) V b$$

$$(2.6) (a V b) c = a V(b c)$$

(2.1) から (2.6) の反転パターンについて、親と子の関係の組み合わせによりそれぞれ、20、16、10、15、10、および20通りの変形規則を生成した。

3. 数式の論理的構造

数式の木構造の葉には演算子か被演算数、あるいは関数名か変数がラベル付けされる。今回検討した演算子は四則演算子 {+, -, ×, ÷}、微分演算子 {′}, 根号 {√}, および分数記号 {—} である。被演算数と変数は {u}、関数名は {f} と記す。

数式の木構造の葉に許される演算子と被演算数は、葉の空間的な位置付けにより制限されている。節点Lの子には {+, -, u, f}、節点R、T、およびBの子には {u}、節点RTの子には {′, u}、節点LOTの子には {√} が許される。節点Cの子については節点Cのレベルの関係によって異なり、L-C-Rの場合は {+, -, ×, ÷, u, f}、C-Rの場合は {u, f}、T-C-Bの場合は {—}、LOT-Cの場合は {u} が許される。さらに、L-C-Rについては、Lの子が演算子ならCの子は {u, f}、Lの子が {f} ならCの子は {u} という組み合わせが許される。

数式の空間的構造の変形規則の左辺と右辺の式に対して、これらの制約条件を付加することにより、論理的構造を持つ等式を得た。例えば、 $a(c W d) = (a c) W(a d)$ の場合、aは {+, -, u, f}、cは {u}、Wは {+, -, ×, ÷, u, f}、dは {u}

Generating Exercises by Mathematics ICAI System

Sachiko Deguchi* and Hiroyoshi Ohara**

*Kogyokusha College of Technology,

5-14-2 Nishigotanda, Shinagawa-ku, Tokyo 141, Japan

**School of Science and Engineering, Waseda University,

3-4-1 Okubo, Shinjuku-ku, Tokyo 169, Japan

が許される。

この制約条件により、左辺と右辺の式は正しくなるが、等式として正しくなるとは限らない。各変形規則の制約条件を、正しい組と誤った組に分けた。例えば、 $a(c W d) = (a c) W(a d)$ の場合、 (a, W) の組により表 1 のように正誤が決まる。ここで P は正、N は誤を表わす。なお、正しい制約の組と誤った制約の組に分類する規則を獲得する問題は検討中である。

4. 演習問題の生成

変形規則は制約条件により次のように分類される：

- (a) 制約条件の全てについて、論理的に正しい。
- (b) 制約条件の一部について、論理的に正しい。
- (c) 制約条件の全てについて、論理的に誤りである。
- (b) と (c) に属する変形規則の中から、学生の演習や試験の回答に見出せる誤った変形を抽出した。表 1 に示した $a(c W d) = (a c) W(a d)$ の例では、# が学生の誤る可能性のある変形である。なお、誤った変形で学生が用いるものと用いないものを分類する知識を獲得する問題は今後の課題である。

表 2 に示す様に、空間的構造の変形のメタルール：

(1) および (2.1) から (2.6) より生成された 100 の変形規則の内、正しい変形は 8、制約条件の一部が正しい変形は 37、および誤った変形は 55 であり、学生の誤る可能性のある式変形は、(b) に属する変形が 21 と (c) に属する変形が 16 であった。つまり、今回生成した変形規則の一部は正しい式変形となり、また誤った式変形の一部は学生が用いる可能性があるといえる。表 2 の (d) と (e) 欄の括弧内の数字は前回の解析で対象とした誤りであり、今回の検討ではより多くの誤りを説明することができた。

そこで、正しい変形、および誤った変形で学生が用いるものを、演習問題のクラスとして、その左辺と右辺の式のインスタンスを生成することにより、演習問題の例題を得た。例えば、

$a(c W d) = (a c) W(a d)$ から、
 $[-(c \times d), (-c) \times (-d)]$ 、
 $[a(c + d), (a c) + (a d)]$ 、
 $[f(c + d), (f c) + (f d)]$ 等 18 の左辺と右辺の組が得られる。関数名 f を $\{\sin, \cos, \tan, \log, \exp\}$ から選んで特殊化することにより、この例ではさらに 20 の左辺と右辺の組が得られる。全体では約 300 の組が得られる。これらの式を学生に提示して式変形の演習をさせることができる。なお、各式変形について学生の誤る頻度は様々であり、そ

の情報を演習問題の提示に利用することを検討している。また、左辺と右辺のどちらを提示するかを決定する方式も検討中である。各演算子と各関数に固有の変形規則を知識として持つ必要がある。

5. おわりに

数式の空間的な構造の変形規則を生成する方式と、数式の論理的な制約条件を付加する方式を Macintosh 上に C 言語で実現し、数式変形の演習問題を生成した。数式変形の誤りが多い学生に対して、数学の復習として、ここで得られた演習問題を実施し、演習問題の評価をする予定である。

なお、本研究で現在対象としている式変形の学習能力は、自然科学の概念の学習能力とは大きく異なる。ここで示した式変形を誤る学生が、物理のモデル化については式変形を誤らない学生より優秀である場合も多い。

参考文献

- [1] 出口、後藤、小原、“工科系短大における数学教育のための I C A I システムの検討、” 情報処理学会第 47 回全国大会講演論文集 (1)、1993 年

表 1. $a(c W d) = (a c) W(a d)$ の制約条件

a \ W	+	-	×	÷	u	f
+	P	P	P	P	P	P
-	P	P	N #	N #	N	N
u	P	P	N #	N #	N	N
f	N #	N #	N #	N #	N	N

表 2. 数式の変形規則の正誤および誤用の数

変形規則	(a) 正	(b) 正 or 誤	(c) 誤	(d) (b) の 誤用	(e) (c) の 誤用
(1)	2	3	4	3(1)	2(1)
(2.1)	2	6	12	4(3)	5(1)
(2.2)	0	6	10	4(2)	3
(2.3)	1	5	4	2	0
(2.4)	1	4	10	1(1)	1
(2.5)	2	6	2	3(2)	1
(2.6)	0	7	13	4(1)	4(2)
計	8	37	55	21(10)	16(4)