半順序系列分割問題における既約化による効率評価

5Ｌ－7

加地太一　北海道情報大学
大内　東　北海道大学

１．はじめに

前回等で無閉路有向グラフの系列分割問題について問題を定義し、その解法として、すべての一列化による算法と、既約化による算法の構築、それらの詳細な構成を示した。今回はさらに、無閉路有向グラフに対する半順序集合の立場からの考察を加え、系列性の保持などの詳細化を行う。また、すべての一列化の生成による算法と、既約化による算法の効率の違いを切断決定子の生成数から検討を試みる。

２．系列分割問題

無閉路有向グラフＤ（Ｖ，Ｅ）が与えられたとき、Ｄの有向辺が定めるＶ上の関係の反射的かつ推移的な閉包を与える。その関係を≦とし、それから導かれる半順序集合を（Ｖ，≦）とする。これをグラフＤから導かれた<u>半順序集合</u>と呼ぶ。

Ｄについて次の性質が成り立つ。（Ｖ，≦）の２元ｖ，ｗに対してｖ≦ｗが成立するならば、ｖから出発しｗに至るＤ上の有向路が存在する。また入り口（source）と出口（sink）を持つとき、これらに対応して、（Ｖ，≦）は最小元と最大元をもつ。

空でないＶの部分集合Ｕから誘導されたＤの部分グラフをＨとする。Ｈに含まれる任意の２点がＤの有向路により結ばれるなら、Ｈの有向路によっても結ばれるとき、Ｈは<u>半順序の系列を保持する</u>Ｄの部分グラフであるという。これは（Ｖ，≦）の部分半順序集合（Ｕ，≦）がＨから派生された半順序集合（Ｕ，≦）と一致することを意味している。

ここで頂点集合Ｖの分割$V_1, V_2, \cdots, V_k$が性質

（１）各V_iから誘導されたＤの部分グラフD_iは半順序の系列を保持する部分グラフである。

（２）任意のD_iとD_jを直接結ぶＥの有向辺が存在すれば、それらはすべて同一の向きであり、また任意のD_i、D_jおよびD_mの間に存在する有向辺はサイクルを構成しない。

を持つとき、この分割から誘導された部分グラフの列

$D_1, D_2, \cdots, D_k$

をＤの<u>系列分割</u>という。各V_iをこの系列分割のブロック、また異なるV_iとV_jを結ぶＥの有向辺の集合をこの系列分割のカット辺の集合という。各ブロックに属する頂点の重みの総和が与えられた数Ｐを越えない条件のもとで、カット辺の重みの総和を最小にする系列分割を求める問題を<u>最適系列分割問題</u>という。

また切断についての考察を以下に述べる。台Ｖを相互排他的かつ網羅的な２つの部分半順序集合Ｂ、Γに分け、Ｂの任意の元ｂとΓの任意の元ｃに対して、それらが比較可能ならば、必ずｂ＜ｃが成立するとき、ＢをＶの下組、ΓをＶの上組という。そして順序対（Ｂ、Γ）をＶの切断とする。また半順序集合（Ｖ，≦）に対して、下組Ｂ、上組Γによる切断（Ｂ、Γ）が与えられたとき、その表現グラフＤにおいて、上組Γの点ｘ∈Γはそのすべての直接の先行点（ｘに流入する辺の始点）がΓ自身に属するものをΓの内点、そうでないものをΓの境界点という。境界点の集合Ｐは分割（Ｂ、Γ）を一意に決定するので、これを（Ｖ，≦）の<u>切断決定子</u>という。算法上の構成として以上の切断決定子をもって切断を表現する。

３．すべての一列化の生成による算法

一列化の問題とは半順序を全順序に埋め込むことであり、その一列化グラフの表現はＤの頂点を直線上で並べ変え、すべての辺の矢線の向きが常に右側に向くようにしたグラフの図表現である。半順序なグラフはいつでも一列化が可能であり、無閉路有向グラフからは複数の一列化グラフが生成されることは自明である。

ここで、無閉路有向グラフの系列分割と、その一列化グラフの系列分割の関係について論ずる。一列化グラフの系列分割問題はKernighan[1]によって研究されており、分割された各部分集合の頂点の重みの総和がブロックサイズ以下であり、系列性を保存する条件のもとで切断される辺のコストの総和を最小とする分割を求めることである。また、部分集合の先頭要素をもって切断を表し、ブレーク・ポイントと呼んだ。ここで、無閉路有向グラフに対する一列化グラフとそのブレーク・ポイントｂを与えると、無閉路有向グラフの切断を表す切断決定子は一意に定まる。なぜなら、ｂにより下組、上組が一意に定まり、上組の境界要素の集合として切断決定子が定まるからである。切断決定子を与えると、その切断決定子を与えるような無閉路有向グラフに対する一列化とブレーク・ポイントの対が多数存在する。なぜなら、下組グラフの一列化の後に切断決定子の中で入り字数０の要素集合の中から非決定的に選ばれたｖを出発点とする上組グラフの一列化を接続することによって生成されるからである。以下に、無閉路有効グラフとその一列化グラフの分割の関係について定理を示す。

定理：ある無閉路有向グラフＤの任意の切断決定子ＰはＤのある一列化されたグラフのブレーク・ポイントによって誘導された切断に等しい。

定理：半順序グラフＤにおける系列分割はＤのある一列化されたグラフの系列分割と一致する。

また逆に、

定理：グラフＤの任意の一列化表現に対して、ブレーク・ポイントの列$b_1 < b_2 < \cdots < b_m$を与えると、それぞれ切断決定子の鎖$P_1 \ll P_2 \ll \cdots P_m$が一意に定まる。

以上の定理より、無閉路有向グラフの最適系列分割

Evaluation for Reduction in Sequential Partitions of Acyclic Graphs
Taichi Kaji, Azuma Ohuchi
Hokkaido Information University,
Hokkaido University

の解はその無閉路有向グラフに対するすべての一列化グラフの系列分割の中に存在する。すべての一列化されたグラフの集合をΩとすると、その要素はGT_1，GT_2，・・・，$GT_m \in \Omega$となる。GT_iはある一列化されたグラフを示す。このとき、一列化グラフの最適系列分割問題を求める関数をSequenOpt（GT_i）とする。このSeqenOptの効率的手法としてはKernighanなどが上げられる。これらの手法を用いて本問題の解は以下の値となる。

$\mathrm{Min}_{i=1...m}$ SequnOpt（GT_i）

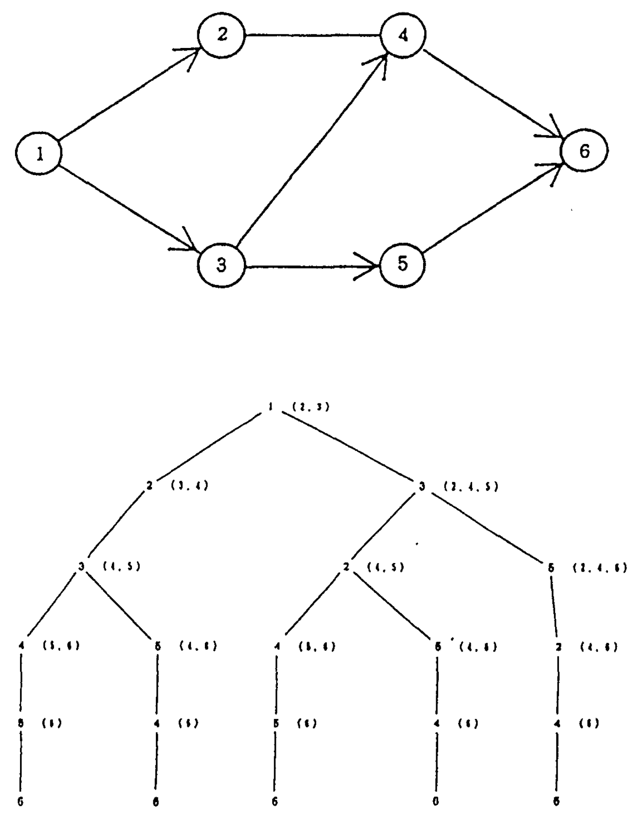

図１．無閉路有向グラフとそのすべての一列化を求める木構造

４．既約化による算法

無閉路有向グラフに対するすべての一列化グラフを生成し、それぞれの最適系列分割の中での最良解を求めることにより、本問題の解が得られることを示した。図１は無閉路有向グラフからすべての一列化グラフを生成する探索木を示す。このとき、ルートからリーフに至る頂点番号系列はそれぞれ一列化された番号列である。また各節点にはその節点自身とすべての親の節点を含んだ下側集合とそれ以外を上側集合に分割したときの切断決定子を割り当てることと一致する。ある分割を表す切断決定子は複数の一列化されたグラフで導出され表現される。本問題において必要な情報はすべての分割に対応する切断決定子と、その各切断決定子の前後関係である。したがって、すべての一列化グラフを生成することは問題を解くうえで非効率な計算を行っている。ここでは前者で求めたすべての一列化生成の木に対して同レベル中に存在する同一な切断決定子を削除し節点の親ポインターのみをつなぐことによって木を既約化し、計算の負担の減少を計る。本算法では切断決定子という概念を新たに用い、既約化とともに動的計画法により無駄のない算法の構成を示す。

１）全ての切断決定子を生成し、前後関係を明らかにする。

２）各切断決定子に対して動的計画法を用い、前後関係順に部分解の最良値を確定していく。

５．効率評価

すべての一列化を求めて解く場合の計算量は一列化されたグラフの系列分割の計算量がＯ（ｎ）で求まることを考慮し、生成されるすべての一列化グラフの数をｍとすると、Ｏ（ｍ×ｎ）と考えられる。ただし、ｍの値は非決定的な値であり、グラフの構造に大きく依存することとなる。このＯ（ｍ×ｎ）の値が少なくとも本問題の最悪の計算量となる。

上記の２つの算法の効率を比較検討するために両算法の切断決定子の生成数に着目する。すべての一列化の生成によって生じる切断決定子の木に対して同レベル中に存在する同一な切断決定子を削除し節点の親ポインターをつなぐことによって、木は既約化され、すべての切断決定子とその順序関係のみを表すグラフとなる。このとき、木の節点数が前者の算法、グラフの節点数が後者の算法の計算の負担を示すこととなる。この節点数の数値実験による比較を用いて両者の算法の効率評価を行う。ただし、この切断決定子の生成数は無閉路有向グラフの頂点数のみならず、無閉路有効グラフの構成によって大きく影響される。したがって、理論的に切断決定子の生成数を求めることは困難である。しかし、無閉路有効グラフをある特定な構成に限ることによって、推察することは可能と考えられる。たとえば、入り口、出口を伴う２並列なグラフの場合、既約化されたグラフの節点数は$O(n^2)$となり、木の場合は$O(2^n)$と考えられる。

６．おわりに

本論分では半順序集合からの立場から問題の詳細化を行い、系列性の保存について明確化した。さらに両者の算法の効率評価について検討を試み、本算法の特性を考察した。次の研究として、さらに半順序集合からの問題の詳細化を深め、問題を改めて明確に構成する。

参考文献

1)Brian.W.Kernighan: Optimal Sequential Partitions of Graph, J.ACM,Vol.18,No.1,pp.34-40(1971).

2)加地、大内：一列化と半順序なグラフの分割、情報処理学会第４６回全国大会講演論文集（１）、pp.75-76.

3)加地、大内：無閉路有向グラフにおける系列分割問題の算法構成、情報処理学会第４７回全国大会講演論文集（１）、pp.83-84.