# 命題帰結論理 Cm と名辞帰結論理 Cn の代数的モデル

2P－9

山口武利, 程京徳, 牛島和夫
九州大学 工学部

## 1. はじめに

“もし…ならば…”という十分条件関係は、知識の表現と推論にとって不可欠である。

古典数理論理は十分条件関係を実質含意と呼ばれる論理結合子“→”で表現する。$A \rightarrow (B \rightarrow A)$ は古典数理論理においては論理定理であるので、$A$ が妥当であれば、推論規則を用いることによって、$A$ と $B$ が無関係であったとしても $B \rightarrow A$ を推論できる。人間の通常の思考という観点からいえば、この推論は妥当とはいえない。この例は、実質含意のパラドクスと呼ばれている [1, 2]。古典数理論理は、実質含意のパラドクスを含んでいるので、知識の表現と推論を基礎付ける論理体系としては適当でないといえる。

十分条件関係を自然に表現する内包的な基本論理結合子を持ち、論理定理には実質含意のパラドクスが含まれない論理体系が、数多く提案されている。最も知られているものに、命題相関論理 R と命題帰結論理 E があり、ともに健全かつ完全なモデルが見つけられている [1]。他にも、Lin によって提案された命題帰結論理 Cm と名辞帰結論理 Cn がある [2]。Cn は Cm の言語に個体記号、関数記号、名辞記号を導入し、述語レベルに拡張したものである。ただし、これらの健全かつ完全なモデルは、まだ見つけられていない。

最近、Cm は実質含意のパラドクスを含まない命題相関論理 R と演繹等価であることが分かったので [3]、R のモデルは Cm のモデルに用いることができる、と考えられる。

本論文では、Cm の健全かつ完全な代数的モデルを示し、それを Cn の健全かつ完全な代数的モデルに拡張することについて述べる。

## 2. 命題帰結論理 Cm と名辞帰結論理 Cn

命題帰結論理 Cm は、三つの基本論理結合子 ¬、∧、⇒ で、以下の公理図式と推論規則によって形式化される [2]。

公理図式

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \qquad \text{(A1)}$$

$$(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \qquad \text{(A2)}$$

$$A \Rightarrow (A \wedge A) \qquad \text{(A3)}$$

$$(A \wedge B) \Rightarrow A \qquad \text{(A4)}$$

$$(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A) \qquad \text{(A5)}$$

$$((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C)) \qquad \text{(A6)}$$

$$A \Rightarrow (\neg(\neg A)) \qquad \text{(A7)}$$

$$((\neg A) \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg B) \Rightarrow A) \qquad \text{(A8)}$$

$$(A \wedge (\neg B)) \Rightarrow (\neg(A \Rightarrow B)) \qquad \text{(A9)}$$

$$(A \wedge (\neg((\neg B) \wedge (\neg C)))) \Rightarrow (\neg((\neg(A \wedge B)) \wedge (\neg(A \wedge C)))) \qquad \text{(A10)}$$

推論規則

$A$ と $A \Rightarrow B$ から $B$ を推論する。　(R1)

$A$ と $B$ から $A \wedge B$ を推論する。　(R2)

名辞帰結論理 Cn は Cm の述語レベルへの拡張であり、公理図式及び推論規則は Cm と同じである。ただし、述語記号は用いず、それに意味的に対応する名辞記号 (notion symbol) を用いる。また、$p$ をある1変数名辞記号で、$v$ を変数としたとき、

$$U(v) =_{df} p(v) \Rightarrow p(v)$$

$$U(v)!X(v) =_{df} \neg(U(v) \Rightarrow \neg X(v))$$

を定義する。Cn には全称記号 ∀、存在記号 ∃ という限定記号が存在しない。その代わりに、$U(v)\Rightarrow$、$U(v)!$ を用いる。“$U(v)\Rightarrow X(v)$”は“$v$ が考えている個体の集合にあるならば必ず $X$ を満たす”を、“$U(v)!X(v)$”は“$v$ が考えている個体の集合にあるならば $X$ を満たす場合がある”ということを意味する。

## 3. 命題帰結論理 Cm と名辞帰結論理 Cn の代数的モデル

命題帰結論理 Cm は命題相関論理 R と演繹等価であることから、R の健全かつ完全な代数的モデルであるド・モルガンモノイド (de Morgan monoid) が、Cm の健全かつ完全な代数的モデルになる。

**[定義 1（ド・モルガンモノイド)]**

ド・モルガンモノイド D $= (D, \cap, \cup, \sim, \circ, e)$ は、以下の条件を満たす構造である [1]。

i) $(D, \cap, \cup, \sim)$ は、ド・モルガン束である。即ち、

(1) $(D, \cap, \cup)$ は分配束である。

Algebraic Models of Propositional Entailment Logic Cm and Notional Entailment Logic Cn
Taketoshi Yamaguchi, Jingde Cheng and Kazuo Ushijima
Faculty of Engineering, Kyushu University
6-10-1 Hakozaki, Fukuoka 812, Japan

(2) ～はド・モルガン補元と呼ばれ、次の性質を満たす。

a) $a \leq \sim b$ ならば $b \leq \sim a$

b) $\sim a \leq \sim b$ ならば $b \leq a$

ii) $(D, \circ, e)$ は アーベリアンモノイドである。即ち、

(1) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$、$a \circ b = b \circ a$

(2) $e \in D$ で、$a \circ e = e \circ a = a$

iii) $a \circ (b \cup c) = (a \circ b) \cup (a \circ c)$

iv) $a \leq a \circ a$

v) $a \circ b \leq c$ のときかつそのときに限り $a \circ \sim c \leq \sim b$

これを以下のように名辞帰結論理 Cn の代数的モデルに拡張する[4]。

**[定義 2 (ド・モルガンモノイドモデル)]**

ド・モルガンモノイドモデル $Q = (S, V_v, \mathrm{D}, V_a)$ は以下の条件を満たす構造である。

i) 構造 $S = (U, I)$ を次のように定義する。

(1) $U$ は、個体の非空集合である。

(2) $I$ は各関数記号 $f$ に対して $U^n$ から $U$ への関数 $I(f)$ を対応づけ、各名辞記号 $p$ に対して $U^n$ の部分集合 $I(p)$ を対応づける．

ii) 変数付値 $V_v$ は、個体変数の集合 $D_i$ から $U$ への写像である。また、項の集合 $D_t$ から $U$ への写像 $S_{V_v}$ を変数付値 $V_v$ によって定義する。

(1) 項 $t$ が個体変数 $v$ ならば、$S_{V_v}(v) = V_v(v)$

(2) $S_{V_v}(f(t_1, t_2, \cdots, t_n)) =$
$I(f)(S_{V_v}(t_1), S_{V_v}(t_2), \cdots, S_{V_v}(t_n))$

iii) $\mathrm{D} = (D, \cap, \cup, \sim, \circ, e)$ はド・モルガンモノイドである。

iv) $V_a$ は次の条件を満たす原子論理式の集合 $D_a$ から $D$ への写像である。

(1) $V_a(t) = e$

(2) $e \leq V_a(p(t_1, t_2, \cdots, t_n))$ のときかつそのときに限り $(S_{V_v}(t_1), S_{V_v}(t_2), \cdots, S_{V_v}(t_n)) \in I(p)$

**[定義 3 (演算 →)]**

ド・モルガンモノイド D において、2項演算 → を、$a \circ b \leq c$ のときかつそのときに限り $a \leq b \rightarrow c$ で定義する。

**[定義 4 (付値)]**

ド・モルガンモノイドモデル $Q$ によって決定される論理式 $A$ の付値 $V_Q$ を次のように定義する。

i) $A \in D_a$ ならば、$V_Q(A) = V_a(A)$

ii) $A$ が $\neg B$ という形ならば、$V_Q(\neg B) = \sim V_Q(B)$

iii) $A$ が $B \wedge C$ という形ならば、
$V_Q(B \wedge C) = V_Q(B) \cap V_Q(C)$

iv) $A$ が $B \Rightarrow C$ という形ならば、
$V_Q(B \Rightarrow C) = V_Q(B) \rightarrow V_Q(C)$

**[定義 5 (妥当性)]**

論理式 $A$ は、任意のド・モルガンモノイドモデル $Q$ において $e \leq V_Q(A)$ ならば、妥当であるという。

これらの定義から、次の定理 1、2 が成立する。証明については、文献 4 を参照されたい。

**[定理 1 (健全性)]**

Cn の論理定理はすべて妥当である。

**[定理 2 (完全性)]**

Cn の妥当な論理式はすべて論理定理である。

定理 1、2 より次の定理が成立する。

**[定理 3]**

Cn の論理定理全体の集合と、 Cn の妥当となる論理式全体の集合は同じである。

## 4. おわりに

本論文において、命題帰結論理 Cm と名辞帰結論理 Cn の健全かつ完全な代数的モデルを構築した。

本論文で示したように、 Cm を述語レベルに拡張した Cn に対して、 Cm の健全かつ完全なモデルを Cn の健全かつ完全なモデルに簡単に拡張できる。このように、モデル論の観点からみると述語レベルに拡張する方法としては、 Lin の提案した方法[2] は興味深い。

論理体系のモデルはその論理体系の性質を調べることにとって有効である。本論文の結果に基づいて、 Cm、Cn の公理系の独立性を調べることができる。また、 Cn と述語相関論理 RQ との比較研究も、今後の課題として挙げられる。

## 参考文献


[1] A.R.Anderson and N.D.Belnap Jr.: "Entailment: The Logic of Relevance and Necessity," Vol.1, Princeton University Press, 1975.

[2] B.Lin: "Entailment System - Propositional Caluculus System Cm and Notional Caluculus System Cn" in B.Lin, "Entailment Logic - The Combination of Traditional Logic and Modern Logic", pp.285–294, Guizhou, 1985.

[3] J.Cheng and T.Tagawa: "On the Decidability Problem of Entailment Logic Cm," Proc. 3rd International Conference for Young Computer Scientists, pp.2.155–2.156, Beijing, China, July 1993.

[4] 山口武利: "述語帰結論理 Cn の代数的モデルの構築", 九州大学工学部情報工学科卒業論文, 1993.