曲面モデリングにおける大域的幾何拘束*

1V－6

木村　昌弘†

NTT ヒューマンインタフェース研究所‡

1　はじめに

曲面モデリングの一つの目標は、デザイナーが、様々な形状の曲面を、自分の思い通りに操作して、目的の性質をもつ曲面を作成できるようにすることである。曲面モデラーにおいて、現在最も広く用いられている曲面は、Bezier 曲面、Bスプライン曲面のようなテンソル積スプライン曲面である。この様式では、曲面を定義している制御点を直接操作することにより、曲面が変形される。制御点を引っ張ると曲面がその近くで局所的に膨らみ、制御点を押すと曲面がその近くで局所的に凹む。したがって、実際の変形操作とそれに対する曲面の応答とが直感とよくあう。また、変形に局所性があるので、曲面形状の細かい制御が可能である。しかしこの様式のもとで、全体的に「平ったくせよ」とか「丸くせよ」というような大域的な変形が要求されたときには、非常に多くの制御点の位置決めが必要になる。したがって、曲面全体の形状を自動的に制御する手法の開発が望まれる。

曲面モデリングでは、様々な幾何拘束が要求される。それらは大きく2つに分類される。まず1つめは、デザインする曲面が補間しなければならない幾何データー(空間内の有限個の点や曲線、また、それらの点において、その曲線上において与えられた法ベクトル等)を指定するものである。次は、デザインする曲面全体の形状の特徴を指定するものである。後者を、曲面モデリングにおける大域的幾何拘束と呼ぶことにする。通常、大域的幾何拘束はエネルギーの言葉で表現される。様々なエネルギーが提案されているが、曲面の大域的幾何構造の直接制御により、曲面形状の広範な操作を目指したものはない。

本報告では、曲面全体の形状を自動的に制御するために、曲面の大域的幾何構造の直接制御を行う。

2　エネルギー汎関数

曲面 S_0 が与えられていて、それは、$X_0 : \Omega \to \mathbf{R}^3$ によってパラメトリックに表現されているとする。ここに、Ω は $\mathbf{R}^2$ 内の領域である。デザイナーの意図する形状になるように、曲面 S_0 を自動的に変形して、曲面 S を生成する。ここで曲面 S も、$X : \Omega \to \mathbf{R}^3$ のように、パラメトリックに表現されるとする。この曲面がテンソル積スプライン曲面ならば、この操作は、自動的に、曲面を定義する制御点の位置決めをする操作である。デザイナーの意図する形状に変形するために、我々はエネルギーを導入し、それを最小化するアプローチをとる。デザインする曲面 S の単位法ベクトルを N、面積要素を dA、主方向、主曲率をそれぞれ $e_1, e_2; k_1, k_2$、ガウス曲率を K、平均曲率を H とする。

まず、曲面の形状制御、すなわち、デザイン曲面の大域的幾何拘束として、すでに提案されているエネルギーについて概観する。最もよく使用されているエネルギーは、線形化された薄板のエネルギー (cf. [1]、[5]) である。しかし、このエネルギーは、曲面の幾何学的量を直接的に測定していないので、有限自由度の範囲でこのエネルギーを最小化しても、生成される曲面の幾何構造を制御することにはならない。次に、曲面の幾何構造を制御しているエネルギーの例をあげる。曲面が平面であるとき、そのエネルギーが最小になるエネルギー汎関数として、次が提案されている (cf. [2])：$\int_S ({k_1}^2 + {k_2}^2)\, dA$。これを拡張して、サイクライド(球面、円筒面、円錐面、輪環面、平面)のときエネルギーが最小になるエネルギー汎関数として、次が提案されている (cf. [3])：$\int_S ((e_1 k_1)^2 + (e_2 k_2)^2)\, dA$。また、

*Global Geometric Constraints for Surface Modeling

†Masahiro Kimura

‡NTT Human Interface Laboratories

デザイン曲面の大域的幾何拘束から曲面の形状操作を目指した例も提案されている。そこでは、曲面を 1) 平にする、2) 円柱面的にする、3) 丸くする、ことを目的として、それぞれ次のようなエネルギー汎関数を用いている (cf. [4]) : 1) 曲面 $(u,v) \rightarrow K(u,v)N(u,v)$ の面積；2) 曲面 $(u,v) \rightarrow X(u,v) + (H(u,v)/K(u,v))N(u,v)$ の面積；3) 曲面 $(u,v) \rightarrow (K(u,v)+H(u,v)^2)N(u,v)$ の面積。

曲面形状のより広範な操作ができるように、上で述べたエネルギー汎関数を発展させたい。曲面のガウス曲率、平均曲率は、曲面上定義された大域的な幾何学的量であり、曲面の形状と密接に結びついている。したがって、曲面形状のより広範な操作のためには、これらの量を直接制御することが最も自然である。我々はエネルギー汎関数 E として、次の E_K, E_H の和を用いることにする。ここに、

$$E_K = \int_\Omega |K-K_0|^2\, du\, dv, \quad E_H = \int_\Omega |H-H_0|^2\, du\, dv,$$

K_0, H_0 は Ω 上の関数で、デザイナーが形状操作のために指定するものである。例えば、デザイン曲面 S は、$K_0 = H_0 = 0$ とすれば、平面的に、また、$K_0 = 1/r^2$, $H_0 = 2/r$ とすれば、半径 r の球面的になる。

3 エネルギー最小化

多くの場合、変形曲面 S も、初期曲面と同じ接続条件で周囲の曲面と交わることが要請される。一般に、変形曲面 S の形状が、初期曲面 S_0 の形状から著しく離れていることとは望まれない。したがって、求める写像 X は、適当な境界条件を満足し、エネルギー汎関数 E の極小値を与える写像のうち、写像 X_0 に最も近い写像である。

考慮する曲面が、テンソル積スプライン曲面の場合を考える。特に、制御点 $\{P_{ij}\}$, $(0 \le i \le m,\ 0 \le j \le n)$ によって定義される一様双 3 次 B スプライン曲面を考える。ここに、m, n は 3 以上の整数である。初期曲面 S_0 が周囲の曲面と G^2 連続に交わっていれば、制御点 $\{P_{ij}\}$, $(3 \le i \le m-3,\ 3 \le j \le n-3)$ 以外の制御点 $\{P_{ij}\}$ を固定することにより、デザイン曲面 S は、再び周囲の曲面と G^2 連続に交わる。ゆえに、標準的な勾配降下法により、この残りの $3(m-5)(n-5)$ 個のパラメータを求めれば、目的のデザイン曲面 S が得られる。

4 おわりに

曲面モデリングにおける大域的幾何拘束の必要性について述べた。曲面の大域的幾何拘束のために提案されたエネルギー汎関数について概観し、それらを発展させて、曲面形状のより広範な操作が可能なエネルギー汎関数を提案した。また、テンソル積スプライン曲面の場合に、エネルギー最小化のスキームについて述べた。

謝辞

日頃ご指導を頂く、酒井部長、立石主幹研究員ならびに、知能ロボット研究部の諸氏に、感謝致します。

参考文献

[1] G. Celniker and W. Welch, Linear Constraints for Deformable B-Spline Surfaces, Computer Graphics Special Issue on 1992 Symposium on Interactive 3D Graphics, 165-170.

[2] H. Hagen and G. Schulze, Automatic smoothing with geometric surface patches, Computer Aided Geometric Design, 4 (1987), 231-235.

[3] H.P. Moreton and C.H. Sequin, Functional Optimization for Fair Surface Design, Computer Graphics, 26 (1992), 167-176.

[4] T. Rando and J.A. Roulier, Designing faired parametric surfaces, Computer-Aided Design, 23 (1991), 492-497.

[5] W. Welch and A. Witkin, Variational Surface Modeling, Computer Graphics, 26 (1992), 157-166.