# 5T−4　積分方程式法による数値等角写像のための Symm と Hough & Papamichael の定式化の比較

天野　要　安原俊文
愛媛大学　工学部

## 1．はじめに

与えられた Jordan 曲線の内部，外部，または，２つの Jordan 曲線で囲まれた有界な２重連結領域からそれぞれ単位円の内部，外部，または，円環領域への等角写像の数値計算法として，問題を第１種 Fredholm 型の積分方程式に帰着させる Symm[1)-3)] の積分方程式法が著名である．後に， Gaier[4),5)] の提案に基づいて，Hough & Papamichael[6)] は Symm の積分方程式法をこれらの３種の等角写像の統一的な数値計算法として再定式化し，再定式化が角点における特異性の軽減という利点を持つことを指摘した．我々は，角点の有無にかかわらず，Hough & Papamichael の定式化が Symm の定式化より優れていると考えられることを指摘したい．

## 2．積分方程式法

次の３種の等角写像は，２重連結領域の回転の任意性を除いて，一意的に定まる．

(1) 内部等角写像： Jordan 曲線 C で囲まれた領域 $D_I$ から単位円内部への等角写像 $w=f_I(z)$．$D_I$ 内に原点を取り，正規化条件 $f_I(0)=0$, $f_I'(0)>0$ を課す．

(2) 外部等角写像： C の外側の領域 $D_E$ から単位円外部への等角写像 $w=f_E(z)$． 正規化条件 $f_E(\infty)=\infty$, $f_E'(\infty)>0$ を課す．

(3) ２重連結領域等角写像：２つの Jordan 曲線 $C_1$ と $C_2$ で囲まれた有界な２重連結領域 $D_D$ から円環領域 $\mu<|w|<1$ への等角写像 $w=f_D(z)$．$C_1$ と $C_2$ は外側と内側の境界で，同心円 $|w|=1$ と $|w|=\mu$ に移るとする．

内部領域の定式化は同一で，２重連結領域の場合には外部領域の場合と類似の議論が可能である．ここでは外部領域の場合だけを記す．Symm はその写像関数を

$$f_E(z)=z/\gamma\exp\{\hat{g}_E(z)+i\hat{h}_E(z)\}, \qquad (1)$$

$$\hat{g}_E(z)+i\hat{h}_E(z)=\int_C\hat{\sigma}_E(\zeta)\log(z-\zeta)|d\zeta| \qquad (2)$$

と表現した．ここに，$\gamma$ は C の容量で，ソース密度 $\hat{\sigma}_E(\zeta)$, $\zeta\in C$ は結合積分方程式

$$\int_C\hat{\sigma}_E(\zeta)\log|z-\zeta||d\zeta|=\log\gamma-\log|z|,\quad z\in C, \qquad (3)$$

$$\int_C\hat{\sigma}_E(\zeta)|d\zeta|=0 \qquad (4)$$

の解である．Gaier と Hough & Papamichael はこれを

$$f_E(z)=1/\gamma\exp\{g_E(z)+ih_E(z)\}, \qquad (5)$$

$$g_E(z)+ih_E(z)=\log\gamma\int_C\sigma_E(\zeta)\log(z-\zeta)|d\zeta| \qquad (6)$$

と表現した．ソース密度 $\sigma_E(\zeta)$, $\zeta\in C$ は積分方程式

$$\int_C\sigma_E(\zeta)\log|z-\zeta||d\zeta|=1,\quad z\in C \qquad (7)$$

の解で，$\gamma$ との間に

---

A Comparison Between the Formulations of Symm and Hough & Papamichael for the Numerical Conformal Mapping by the Integral Equation Method
Kaname Amano and Toshifumi Yasuhara
Ehime University, Matsuyama 790, Japan

$$\log\gamma \int_C \sigma_E(\zeta)|d\zeta| = 1 \tag{8}$$

が成立する．共役な調和関数 $g_E(z)$ と $h_E(z)$, $\hat{g}_E(z)$ と $\hat{h}_E(z)$ の間には

$$g_E(z)+ih_E(z)=\log z+\hat{g}_E(z)+i\hat{h}_E(z),$$
$$\lim_{z\to\infty}\{\hat{g}_E(z)+i\hat{h}_E(z)\}=0 \tag{9}$$

なる関係があって，ソース密度と容量の関係式(3),(4),(7),(8)は境界条件 $|f_E(z)|=1$, $z\in C$ と無限遠点における条件(9)から得られる．

## 3．比較

Hough & Papamichael の定式化は，Symm の定式化と比較して，３種の等角写像の計算手順の統一性だけでなく，次のような利点を持っている．

・ 座標系からの独立性：外部領域と２重連結領域の場合に，座標系の平行移動に対して不変であり，原点の取り方に依存しない計算結果を得ることができる．

・ 数値写像の精度：しかも，調和関数の境界値が定数型で，$\log|z|$ が領域外に持つ特異性の影響を受けることなく，より高い計算精度を期待することができる．

## 4．数値例

境界を，離心角，長さ，または，偏角で N 等分し，ソース密度を階段関数で，積分を Simpson 則で近似する．$E_f$ と $E_m$ はこうして得られた近似写像関数 $F(z)$ と $|F(z)|$ の誤差の指標である．２重連結領域の場合には $C_1=C$ で，$C_2$ は C を半分に縮小する．

典型的な幾つかの計算例で，Hough & Papamichael の定式化による精度はすべて Symm の定式化による精度と同等またはそれ以上であった．さらに，原点を境界に近づけると，後者の精度は急激に低下する．

例１　楕円　C: $x^2/5^2+y^2=1$ (N=64)

| | | | 離心角, | 長さ, | 偏角 |
|---|---|---|---|---|---|
| 内部 | $E_m$ | | 7.9E-3 | 2.6E-3 | 3.9E-4 |
| 外部 | $E_f$ | Symm | 9.8E-3 | 1.3E-2 | 3.8E-2 |
| | | H&P | 1.3E-3 | 1.3E-2 | 3.8E-2 |
| ２重 | $E_m$ | Symm | 5.8E-3 | 5.2E-3 | 1.4E-2 |
| | | H&P | 5.2E-4 | 5.2E-3 | 1.4E-2 |

例２　Cassini の楕形
C: $|z^2-1|=1.06^2$ (N=64)

| | | | 長さ, | 偏角 |
|---|---|---|---|---|
| 内部 | $E_m$ | | 1.0E-2 | 3.3E-3 |
| 外部 | $E_f$ | Symm | 1.0E-2 | 3.0E-3 |
| | | H&P | 1.1E-3 | 1.3E-3 |
| ２重 | $E_m$ | Symm | 6.2E-3 | 7.7E-4 |
| | | H&P | 1.7E-3 | 7.7E-4 |

## 5．おわりに

数値等角写像の方法として著名な第１種 Fredholm 型の積分方程式法の定式化の間にこのような違いが存在することは重要である．

## 参考文献

1) Symm: Numer. Math., 9, 250-258, 1966.
2) Symm: Numer. Math., 10, 437-445, 1967.
3) Symm: Numer. Math., 13, 448-457, 1969.
4) Gaier: Math. Z., 147, 113-129, 1976.
5) Gaier: E.B. Christoffel, The Influence of His Work on Mathematics and the Physical Sciences (Butzer and Fehér, eds.) 290-303, Birkhäuser, 1981.
6) Hough and Papamichael: Numer. Math., 41, 287-307, 1983.