充足可能性問題と双線形計画問題との関係

4T−1

萩原 斉　　中森 眞理雄
東京農工大学工学部 情報工学大講座

1 まえがき

一般に，ある問題の難しさは，その問題を解くために必要とされる計算量のオーダーを用いて表現される。しかし，計算量というものは，問題の記述方法や計算モデルに依存して決定されるものである。

そこで，本研究では，問題そのものが持つ "難しさ" を，計算モデルに依存しない不変量として表現する方法として，問題を数理計画問題として記述し，その際に必要となる変数の数により各問題の持つ難しさを表現することを試みた。

次に，実際に

- CNF 論理式における充足可能性問題
- 0-1 整数計画問題における判定問題
- 節点カバーの存在判定問題

を数理計画問題（双線形計画問題）として記述した例を示す。

2 CNF 論理式における充足可能性問題について

ここでは，『与えられた CNF 論理式が充足可能であるか否かを判定する問題』を双線形計画問題として記述した結果を示す。なお，ここでは，CNF 論理式における節の数及び変数の数をそれぞれ m 及び n で表すものとし，さらに，第 i 節内に変数 x_j がどのような形で存在するかによって決定される，次に示す係数 a_{ij} $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$ が与えられているものとする。

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{肯定の形で存在するとき}\\ -1 & \text{否定の形で存在するとき}\\ 0 & \text{存在しないとき}\end{cases}$$

このとき，α_{ij} を

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \frac{a_{ij}(a_{ij}-1)}{2}(1-x_j)+\frac{a_{ij}(a_{ij}+1)}{2}x_j\\ &= a_{ij}x_j+\frac{a_{ij}(a_{ij}-1)}{2}\end{aligned}$$

のように定義すると，α_{ij} は表 1 に示すような値を取るので，ここで考える CNF 論理式は，この α_{ij} を用いて

表 1: α_{ij} の取る値

a_{ij} \ x_j	0	1
1	0	1
-1	1	0
0	0	0

$$\begin{aligned}&(\alpha_{11}\vee\alpha_{12}\vee\cdots\vee\alpha_{1n})\\ \wedge\ &(\alpha_{21}\vee\alpha_{22}\vee\cdots\vee\alpha_{2n})\\ \wedge\ &\qquad\cdots\\ \wedge\ &(\alpha_{m1}\vee\alpha_{m2}\vee\cdots\vee\alpha_{mn})\end{aligned}\tag{1}$$

のように表現することができる。

したがって，(1) の CNF 論理式における充足可能性問題は，次のように，連続変数に対する双線形計画問題として記述される。

<u>**問題 1**</u>

$$\begin{aligned}&\text{maximize}\quad z\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\{\alpha_{ij}y_{ij}+(1-\alpha_{ij})(1-y_{ij})\}\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\left\{a_{ij}x_j+\frac{a_{ij}(a_{ij}-1)}{2}\right\}y_{ij}+\right.\\ &\qquad\left.\left\{1-\left(a_{ij}x_j+\frac{a_{ij}(a_{ij}-1)}{2}\right)\right\}(1-y_{ij})\right],\\ &\text{subject to}\\ &\qquad\sum_{j=1}^{n}y_{ij}=1\qquad(i=1,2,\ldots,m),\\ &\qquad 0\le x_j\le 1\qquad(j=1,2,\ldots,n),\\ &\qquad 0\le y_{ij}\le 1\quad(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n).\end{aligned}$$

このとき，問題 1 の目的関数 z の値が最適解に対して m となれば，(1) の CNF 論理式は充足可能である。

なお，問題 1 において使用される変数の数は，x_j を n 個と y_{ij} を mn 個使用しているので，合計 $n+mn=n(m+1)$ 個となる。

A Relation between satisfiability problem and Bilinear programming
HITOSHI HAGIWARA, MARIO NAKAMORI
Tokyo University of Agriculture and Technology
2-24-16 Nakamachi, Koganei, Tokyo 184, Japan

3 0-1 整数計画問題における判定問題について

ここでは,『0-1 整数計画問題において可能解が存在するか否かを判定する問題』を双線形計画問題として記述した結果を示す。また，ここで考える問題は判定問題であるので，目的関数は省略する。

このとき，

問題 2

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m),$$
$$x_j = 0 \text{ または } 1 \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

のような制約条件を持つ 0-1 整数計画問題は，次のように，連続変数に対する双線形計画問題として記述される。

問題 3

$$\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad z \\
&= \sum_{j=1}^{n} \{x_j y_j + (1-x_j)(1-y_j)\}, \\
&\text{subject to} \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m), \\
&\quad 0 \le x_j \le 1 \qquad (j=1,2,\ldots,n), \\
&\quad 0 \le y_j \le 1 \qquad (j=1,2,\ldots,n).
\end{aligned}$$

ここで，問題 3 における目的関数 z は，連続変数 x_j 及び y_j の取り得る値を 0 か 1 に限定するためだけに使用されている。したがって，これにより，問題 3 の目的関数 z の値が最適解に対して n となれば，問題 2 の 0-1 整数計画問題に可能解が存在する。

なお，問題 3 において使用される変数の数は，x_j 及び y_j をそれぞれ n 個（もとの問題における変数の数）ずつ使用しているので，合計 $2n$ 個となる。

4 節点カバーの存在判定問題について

ここでは，無向グラフ $G=(V,E)$ に対応する隣接行列 A 及び定数 $k \le |V|$ が与えられているものとして,『$U \subseteq V$ 及び $|U| \le k$ を満たす節点集合 U が存在するか否かを判定する問題』を双線形計画問題として記述した結果を示す。

なお，隣接行列 A とは

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{節点 } i,j \text{ 間に枝が存在するとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

なる行列のことをいう。また，以下においては $n=|V|$ であるものとする。

問題 4

$$\begin{aligned}
&\text{maximize} \quad z \\
&= \sum_{j=1}^{n} \{x_j y_j + (1-x_j)(1-y_j)\}, \\
&\text{subject to} \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} x_j \le k, \\
&\quad x_i + x_j \ge 1 \qquad (A_{ij}=1), \\
&\quad 0 \le x_j \le 1 \qquad (j=1,2,\ldots,n), \\
&\quad 0 \le y_j \le 1 \qquad (j=1,2,\ldots,n).
\end{aligned}$$

このとき，問題 4 の目的関数 z の値が最適解に対して n となれば，$|U| \le k$ を満たす節点集合 U が存在する。

なお，問題 4 において使用される変数の数は，x_j 及び y_j をそれぞれ n 個ずつ使用しているので，合計 $2n$ 個となる。

5 あとがき

ここまでに示したように，問題 3 と問題 4 は共に元の問題の規模を表す定数 n の 2 倍である $2n$ 個の変数を必要とすることから，同じ計算複雑度を持つ問題であるといる。これに対して，問題 1 は $n(m+1)$ 個の変数を必要とすることから，節の数 m が 1 のときは他の問題と同じ計算複雑度で，m が 2 以上のときは他の問題よりも難しいといえる。

また，現在のところ，ここに示した例のほかに，

- DNF 論理式における充足可能性問題
- ハミルトン閉路の存在判定問題
- c 色でのグラフの配色可能性問題

などのいくつかの問題を双線形計画問題として記述することができているので，今後はさらにいろいろな問題を数理計画問題として記述し，チューリング機械やランダムアクセス機械などをモデルとする計算量の理論における種々の概念を，本論文のような各種計画問題の観点から考察したいと考えている。

参考文献

[1] 中森 眞理雄, “論理式充足可能性，整数計画，および双線形計画について,” 情報処理学会第 45 回全国大会講演論文集 (1), 3X-3 (1992).

[2] 中森 眞理雄, “問題複雑度と線形・双線形計画法,” 統計数理研究所研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」, 1993.