

# 偏微分方程式を用いた等高線地図の補間と滑らかな面の再構成

柴 建 雲<sup>†</sup>, 三 好 孝 治<sup>††</sup> 中 前 栄 八 郎<sup>†</sup>

等高線地図から合理的な補助等高線を算出することは、できるだけ滑らかな 3 次元地形モデルを再構成するための重要な課題の 1 つである。この問題を解決するために、コンピュータグラフィックスおよび地理情報 CAD システムの分野において、多くの研究が行われているが、いまだにオープンな問題として残されている。本論文は、合理的に内挿された補助等高線の算出と、等高線のすべての領域にわたって滑らかな曲面を再構成するために、以下の方法を提案している (1) すべての隣接等高線間内の局所パラメータに対して、制御可能な勾配制御偏微分方程式 (PDE) の適用 (2) すべての等高線上において、与えられた高さ  $C^1$  連続性の両方を満たす、2 段階繰返し収束法の適用。提案手法の有用性を示すために、いくつかの例、すなわち、1 つの領域内に複数個の分岐を持つ滑らかな鞍部形状、および地形図に対する合理的な補助等高線等をあげている。

## Contour Interpolation and Smooth Surface Reconstruction Using Partial Differential Equations

JIANYUN CHAI<sup>†</sup>, TAKAHARU MIYOSHI<sup>††</sup> and EIHACHIRO NAKAMAE<sup>†</sup>

It is one of important issues to acquire the reasonable sub-contour lines from a contour terrain map in order to reconstruct a 3-D terrain model as smooth as possible. Although in the fields of computer graphics and geographic information CAD systems many approaches have been developed to solve this problem, it still remains open. To acquire reasonably interpolated sub-contour lines and reconstruct the smooth surface throughout the whole region of contour lines, we propose the following method: (1) employing the gradient controlled partial differential equations (PDE) in which the local parameters in each region held by every neighboring contour lines are controllable; (2) applying the two step iterative convergence algorithm which satisfies both the given elevation and smoothness with  $C^1$  continuity on every contour line. Usefulness of the proposed method is testified by some examples; the smooth saddle shapes with plural branches in one region and the reasonable sub-contour lines of a terrain map.

### 1. はじめに

等高線地図から等高線を補間し、合理的な曲面を再構成することは、地形の 3 次元形状モデリングを作成するための重要な課題の 1 つである。等高線地図は、水平面を表す 2 変数に対する高さの関数によって、数学的に記述される場であり、その簡潔さから、地形情報を記録する主要な形式の 1 つとして古くから使用されてきた。一方、コンピュータグラフィックス (CG) と地図情報システム (GIS) の進展とともに、デジタ

ル地形モデル (DTM) や、不規則な三角形メッシュ構造 (TIN) などの多角形メッシュが、多くの分野で使用されるようになった。CAD を基礎とする GIS の立場から、等高線地図と多角形メッシュを相互に変換できることが要望されている。一般的に、多角形面から等高線を作成することは容易であるが、等高線から滑らかな曲面を再現することはそれほど簡単ではない。なぜなら等高線地図では、地形面の特徴を表すのに重要と考えられる鞍部、頂上、谷底のような地形面の特徴が失われているからである。また、隣接する等高線の形状が大きく異なる場所には、特別の注意を払う必要がある。これらの地形面は、等高線の内挿または外挿によって滑らかに変化する曲面を再現する必要がある。ここで等高線の内挿は、隣接する異なる高さの等高線によって拘束される領域内に、合理的な補助等高線または高さを持つ頂点を内挿することを意味する。また、等高線の外挿はこれらの領域の外側に対するも

<sup>†</sup> 株式会社三英技研

Sanei Co., Ltd.

現在、中国清華大学電気工学部

Presently with Department of Electrical Engineering, Tsinghua University

<sup>††</sup> 広島工業大学環境学部

Faculty of Environmental Studies, Hiroshima Institute of Technology

のである．たとえば，面の分岐に起因する鞍型面を，滑らかに表示することは，典型的な等高線の内挿問題である．一方，頂上や谷底のそれは，外挿問題になる．

本論文では，等高線間の内挿補間と等高線群から構成される面の再構成を達成することを目的とし，これら等高線から合理的な曲面を再構成する新手法として，勾配制御偏微分方程式の採用を提案する．本手法では，等高線は互いに交差しない，すなわち高さ方向に多価関数となるものは扱わない．ただし，等高線を横切る地点においても  $C^1$  連続性を保証する．これにより，分岐のある面を滑らかに再現でき，高品質の補助等高線を得ることができる．単に面が滑らかに見えるだけでよければ，他の方法，たとえばグローブやフォンシェーディングを使うことができる．また，ベジェ多項式やスプライン関数によって生成される面は，パラメータ空間におけるメッシュ上にマッピングされる制御点によって定義されるものであり，与えられた等高線から地形面を再構成する場合は，等高線が複雑な形状のため，そのようなマッピング関係を見つけることは困難である．本手法の特徴は，複雑な形状の地形面に対しても，また，等高線と面のトポロジーに対しても，自動的に適合することである．

次章で本論文に関連した研究について考察し，3章で提案手法の基本的な考え方を，4章で基礎となる理論を，5章でその実装法について述べる．6章でいくつかの適用例を示し，最終章で結論を述べる．

## 2. 関連した研究

等高線の集合から面を再構成する問題は，この20年間にわたって多くの研究がされてきた<sup>16)</sup>．地形面に関しては以下の3つの問題がある．1つは，異なる高さの等高線上のすべての点で，多角形面を得るための三角形の頂点および線分を一致させることである．グラフ探索<sup>10),11)</sup>と曲面マッピング<sup>7)</sup>はこの問題のための典型的な手法である．より合理的な多角形面を張るために，面積最小<sup>11)</sup>，最小経間距離<sup>7)</sup>，および辺の総和最小<sup>20)</sup>を用いた最短距離関数が提案されている．2つ目は，分岐面の問題である．地形面においては，1つの等高線から複数の等高線に分岐するものだけを考えればよい．そのための最も簡単な方法は，同じ高さの等高線をブリッジによって1つに結合することである．2つの等高線に対して文献9)，18)の方法が使用できる．さらに複数の等高線から複数の等高線に分岐する方法としては文献1)，2)，6)が提案されている．しかし，それらは本論文で論じる対象外の問題である．3つ目は，上述の問題を処理するとき得られる多角

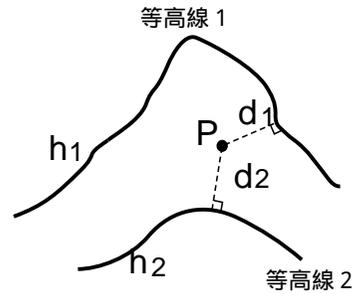


図1 距離比による等高線の補間

Fig. 1 Contour interpolation based on the ratio of distances.

形面を，滑らかにすることである．これらは Bezier パッチ<sup>15)</sup>，curved networks<sup>17)</sup>，あるいは CAGD<sup>19)</sup>の変形タイプの曲線パッチなどの多角形面から作成できる．

上述のほとんどの手法は与えられた等高線の頂点だけを使用しているが，もし特別な頂点や補助等高線<sup>7),12)</sup>が使われるなら，より合理的な面を作成することが可能である．2つの等高線間に位置する任意の点の高さを自動的に補間する方法が文献12)で与えられている．この方法は，頂点から等高線までの距離の比(図1参照)によって高さを計算している．また，スキャナ等で入力されたラスタ地図上で行った補間法<sup>14)</sup>も発表されている．画像空間における形態学的な変換<sup>3)</sup>も等高線の補間に使われる．

面のモデリングに偏微分方程式(PDE)を適用した方法が文献5)で提案された．地形面にPDE面を使った興味深い適用例は，文献13)に見ることができる．しかし，これらの等高線補間の共通の問題点は，再構成された面が滑らかになる(特に与えられた等高線を横切る場所で)保証がないことである．我々は新しい等高線補間法とそれに関連した面の再構成法として勾配制御偏微分方程式を採用した，これらの問題の解決法を提案する．

## 3. 基本的考え方と特徴

本論文で取り扱う地形面は，隣接する異なる高さの等高線によって囲まれる領域において，その高さ関数が偏微分方程式によって決定できる程度に滑らかであると仮定する．これらのPDE方程式を，境界上の高さ勾配条件を用いて解くことによって，合理的な三角形パッチで構成される多角形の地形面を得ることができる．補助等高線は，これらのパッチからサンプリングすることによって描画できる．

PDE法の利点は，CAGDやcurved networks<sup>17),19)</sup>

よりも、面の滑らかさが広域的に保証されることである。したがって、本手法では、異なる高さの等高線間に、補間する線分を設定したり、その頂点を調整したりする必要がない。本手法は、従来法<sup>3),12)~14)</sup>とは異なり、地形面に現れる面分岐の問題を自動的に処理できる。また、PDE 面に、等高線を横切る場所での勾配条件を付加することによって、1つの等高線を共有する両側の隣接面を滑らかに結合できる。すなわち、補間領域の外側にある等高線がこの領域の等高線補間に影響を与えることができる。

## 4. PDE 地形面

### 4.1 PDE 面

PDE 面は偏微分方程式によって表される一種の陰関数面である。多くの場合、PDE 面は解析解を持たない。したがって、何らかの数値解法を必要とする。2次元ユークリッド空間  $(u, v)$  内の領域  $D$  上で定義される PDE 面の一般方程式は、次式で記述できる。

$$P(u, v)h(u, v) = F(u, v) \quad (1)$$

拘束項  $(h, \partial h / \partial n) |_{Bl}$

ここで、 $P(u, v)$  は偏微分演算を含む演算子、 $h(u, v)$  は位置  $(u, v)$  における高さ、 $F(u, v)$  は強制項である。拘束項は、境界線  $Bl$  における高さ、境界線分を含む面の法線の傾きであり、 $n$  は  $uv$  面上の  $Bl$  の法線ベクトルである。すなわち、拘束項  $(h, \partial h / \partial n) |_{Bl}$  を持つ PDE 面の形状は、境界条件だけではなく、 $P(u, v)$  と  $F(u, v)$  の制御項に依存することに注意する必要がある。PDE 面は、方程式中の演算子  $P(u, v)$  が座標  $(u, v)$  に従って変化するか、初期条件  $F(u, v)$  が非零のとき、制御された PDE 面とよばれる。

古典的な PDE 理論に従うと、第1種境界条件(高さ)と第2種境界条件(勾配値)は、同時に同じ場所に課せられない。そうでなければ、方程式は過剰拘束されることになる。したがって、境界条件は  $(h \text{ or } \partial h / \partial n) |_{Bl}$  となるべきである。共通の境界線を持つ2つの面を滑らかに結合するには、境界線の上のすべての点において、それらの面の高さが等しく、かつ境界線と交差する方向の微分値が等しくなければならない。そのためには、それぞれの面に高さ、微分境界条件の両方を課さなければならない。従来の PDE 面はこのような境界条件を許容しない。Bloor ら<sup>5)</sup>は、いくつかのタイプの PDE 面を示し、これらの面の形状に対する制御項の影響を論じているが、境界勾配条件によって、面の形状を制御する方法については論議していない。本論文では、2種類の境界条件の両方を同時に満たす PDE 面について議論する。

## 4.2 勾配制御 PDE 面

### 4.2.1 高さの場と電界場の類似性

2つの電極間によって生ずる2次元電界場の等電位線(図2参照)は、地形の等高線と類似性を持つことが推測される。ある伝導性領域に分布する電界は、次式で表される。

$$\text{div}(\sigma(u, v)\text{grad}\varphi(u, v)) = 0 \quad (2)$$

拘束項  $(h \text{ or } \partial h / \partial n) |_{Bl}$

ここで、 $\varphi(u, v)$  はスカラーポテンシャル、 $\sigma(u, v)$  は物質の伝導率、 $\text{div}$  は発散、 $\text{grad}$  は勾配を表す。ファラデーの法則としてよく知られる電気力線は、電界の分布を表示するのによく用いられ、次式を満足する。

$$\frac{du}{E_u} = \frac{dv}{E_v} \quad (3)$$

ここで、 $E_u, E_v$  は、それぞれ電界の強さ  $\mathbf{E} = \text{grad}\varphi(u, v)$  の  $u, v$  方向成分で、 $du, dv$  はそれぞれ、 $u, v$  の微分である。電気力線と等電位線は互いに直交する。式(2)によって決まる電界の性質は、次のように表現できる。

(a) 非交差性： 等電位線どうし、または電気力線どうしは交差しない。

(b) 単調性： 電位は、電気力線に沿って単調に変化する。

主題を式(2)と同じ方程式に従う高さの場に置き換えると、勾配を示す  $\mathbf{G} = \text{grad}h(u, v)$ 、すなわち勾配線と、高さの場内の局所的な面のパラメータを使用することができる。すなわち高さの場では、電気力線と同じ方程式に従う勾配線は、面の傾斜方向を表す。以下、本論文で扱う高さの場では、次の3つの仮定を設定する。

(1) 地形等高線は互いに交差しない。すなわち絶壁

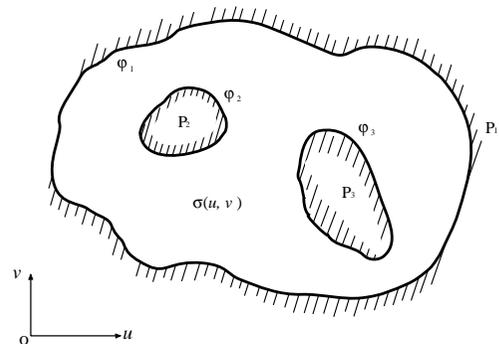


図2 導電領域における2次元電界場。  $P_1, P_2, P_3$  は電極、 $\sigma(u, v)$  は導電率、 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  は境界上の電位  
Fig. 2 A 2D electric field in conductive region.  $P_1, P_2,$  and  $P_3$  are electrodes,  $\sigma(u, v)$  conductivity, and  $\varphi_1, \varphi_2,$  and  $\varphi_3$ , boundary potentials.

のような高さ方向に多価関数になるものは取り扱わない。

(2) 2つの隣接する等高線間では、勾配線に沿う高さは単調に変化する。

(3) 勾配線は、交差や分岐することはない。

したがって、本論文で取り扱う隣接する2つの等高線間には、局所的な小さなピークや谷が存在しない。

#### 4.2.2 局所パラメータと境界条件との関係

式(2)によって規定されるPDE面を地形面に適用する場合、以下の問題を解決する必要がある。

- (1) 面の局所パラメータ値  $\sigma(u, v)$  の自動設定法。
- (2) 境界等高線上において、その高さと勾配条件を、同時に満たす方法。

(2)は、ポテンシャル場と地形面の高さの場の違いを修正するためのものである。すなわち、ポテンシャル場をそのまま地形面の再構成に用いると、裾の方の勾配がゆるやかになり、裾広がり形状となる。これに対して地形面は、等高線間が一般的な勾配を保つものである。このような地形面を生成するためには、与えられた等高線の高さを変えずに、地形面の勾配を制御することが必要である。局所パラメータが一般的なPDE面の一例を図3に示す。この場合、面は滑らかで、その形状は、ラプラス型のPDE面固有の曲線パターンを反映している。面の形状変更は、解析領域内の小領域ごとに局所パラメータを調節することによって実現できる。高さと勾配境界条件を含む式(2)の拡張方程式は、次式で表される。

$$\operatorname{div}(\sigma(u, v)\operatorname{grad}h(u, v)) = 0 \quad (4)$$

拘束項  $(h \text{ and } \partial h / \partial n) |_{B1}$

ここで、式(4)の拘束項は、高さ  $h$  と  $\partial h / \partial n$  の条件が同時に課せられることを示している。この方程式が、過剰拘束になることを避けるために、PDE面の解の中でそれらを直接満足させる代わりに、面の局所パラメータを調整できるように、境界勾配条件を使用する。式(4)の面が従来のPDE面でないことは明らかである。実際に面を決定するには、PDEの逆問題を解く必要がある。著者らの知る限り、この問題に対する解法は存在しない。そこで、この問題を2段階に分けて解く方法を提案する。主な考え方は、式(4)を式(2)のような従来型の問題と、これに付加される境界勾配条件とに分割することにある。すなわち、第1段階として、従来法を用いて前者を解く。第2段階では、第1段階で得られた面における局所パラメータを修正するために、境界勾配条件を使用する。修正された局所パラメータは、計算面を更新するために、前者にフィードバックされる。この2段階処理を、計算面

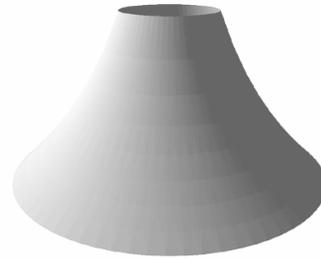


図3 一般的な局所パラメータを用いたPDE面  
Fig. 3 A PDE surface with the uniform local parameter.

が収束するまで繰り返し計算する。

本手法の鍵となる点は、局所パラメータを境界条件に関係づけることにある。各パッチ面上の各点は面の境界線と明示的に結合する必要がある。本手法では、各パッチ面上の勾配線によってそれを実現する。すなわち、パッチ面上の1点が与えられると、この点を通過する勾配線が、境界等高線まで追跡する。勾配線の端点の高さとその勾配から、勾配線に沿う面上の点の高さを予測する。計算された勾配線上の高さ分布と予測値とを比較し、勾配線に沿った計算面の局所パラメータを修正する。もし、次章で記述するように適当な数の勾配線が等高線上に配置されるなら、その修正は、計算面全体にわたって行うことができる。

## 5. 提案手法の実装

まず入力データについて述べ、次にPDE方程式の解法手順について記述する。前章で述べたように、PDE方程式を2段階に分けて解く。第1段階でPDE面の変分の問題と、その離散化について述べる。第2段階で、面の局所パラメータ  $\sigma(u, v)$  の修正手順について記述する。さらに数本の等高線からなる地形の結合問題を解決するため、等高線上の勾配を計算する簡単な方法を示す。

### 5.1 入出力の定義

入力データは、折線からなる等高線の集合である。一般に必要な等高線の位置と高さに加えて、等高線を横切る場所での勾配が必要である。それらの値は、明示的に与えてもよいし、後述する面の形状を改善する手順の中で、計算させることも可能である。このような条件は、隣接等高線によって拘束されるすべての部分領域で、面1つずつが形成されている場合でも、地形面が等高線を横切る場所で、 $C^1$ 連続であることを保証する。

2つの境界条件について検討しよう(図4参照)。等高線の境界の1部で、 $h$ と(または) $\operatorname{grad}\partial h / \partial n$ が

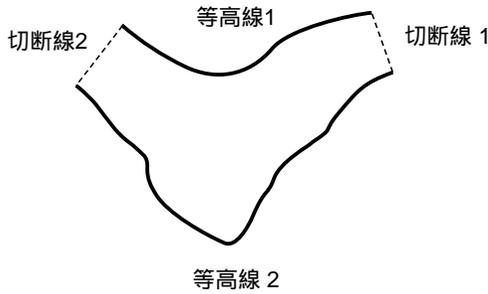


図 4 境界条件

Fig. 4 Boundary conditions.

与えられ、切断線上で法線ベクトルが 0 に設定されている。それは切断線が傾斜線であることを意味する。面の単調性を保つように、境界上の任意の点の勾配の角度は、範囲  $[0, \pi/2)$  に限定される。等高線上の勾配値が与えられない場合は、後述のデフォルトの値が使われる。出力データは、無数の三角形パッチで構成される。これらの三角形パッチは、次節で述べるように、 $C^1$  連続で滑らかな地形面を形成できるように、適切な緻密さを持つメッシュになるまでパッチ数を細分割し、その高さや勾配を調整したものである。これらの三角形パッチから、補助等高線および面上の任意の高さが容易に標本化できる。

## 5.2 FEM に対する変分問題と離散化

第 1 段階で、直接の境界条件だけが関係する式 (4) の副次的問題を解く。これに対応した変分問題は、次の方程式のエネルギー関数  $W$  を、最小にする関数  $h$  を見つけることである。

$$W(h) = \int_D \frac{\sigma}{2} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v} \right)^2 \right] ds \quad (5)$$

ここで、上式は境界線上の高さによって拘束される。 $ds$  は領域  $D$  における面積の微分である。FEM を変分問題に適用するために、計算領域  $D$  を三角形メッシュに離散化する。等高線地図に対する離散化は簡単である。隣接する等高線に囲まれる領域を高さ方向に投影し、その射影した領域を従来の三角形パッチ手法を用いて、粗いメッシュに分割し、順次、適切な緻密さを持つメッシュになるまで細分割する。たとえば、メッシュ中の各要素は、メッシュのすべての辺が、与えられたある長さより短くなるまで繰り返し分割する。その結果、各三角形要素内の面の高さは線形に変化し、局所パラメータは各三角形要素において一定値と仮定することができる。FEM の解法の詳細は、文献 4), 21) を参照されたい。本論文では、FEM に 1 次三角形要素  $e_i$  を用いる。それぞれの要素の勾配は、定数ベクトルを持つ。各要素面の勾配の精度を良くするた

めに、各要素の頂点  $V$  上の勾配  $G_V$  を、その頂点  $V$  を含むすべての要素の勾配  $G_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の平均ベクトルによって定義する。すなわち、

$$G_V = \left( \sum_i G_i \right) / n \quad (6)$$

これらの頂点の勾配は、線形な分布に対するすべての要素の勾配を再調整するとき用いられる。

## 5.3 局所パラメータの修正

三角形要素面は離散化されるから、各要素面上に分布した局所パラメータは、各要素が持つ 1 つの定数値によって近似される。すべての要素パラメータの初期値を 1 とし、第 1 段階で得られた各要素面上のこれらのパラメータは、次の 3 つの手順によって修正される。

### (1) 三角形メッシュ上の勾配線の探索

電気力線のためのパラメータ方程式 (3) の、項  $E_u$  と  $E_v$  を、それぞれ  $G_u$  と  $G_v$  に置き換えると勾配線となる。1 本の勾配線は、各要素の入り口 (または始点) における勾配方向を向く直線線分によって近似することができる。この事実はアルゴリズムの簡素化をもたらす。文献 8) に見られるようなより正確な方法もあるが、本論文の目的には実用上これで十分である。勾配線を求めるには、すべての要素の中心点 (三角形要素面の重心) からはじめて、隣接する 2 つの等高線にたどり着くまで、2 つの方向 (下り勾配と登り勾配) をサーチする。両方の等高線にたどり着いたとき、その交点座標を勾配線の始点と終点とする。便宜上、始点は等高線の高さの高い側を、終点は等高線の高さの低い側にとる。勾配線は始点から終点までの 1 本のベクトルチェーンで表される。したがって、すべての三角形要素の中心点は、いずれかの勾配線に含まれ、1 つの中心点は、ほとんどの場合、複数の勾配線に含まれる。したがって、ほぼ均一に分布する勾配線を得ることができ、等高線の補間の精度を上げている。

### (2) 勾配線上の要素パラメータの修正

1 つの勾配線の始点を  $A$ 、終点を  $B$  とする (図 5(a) 参照)。 $h_A, h_B$  をそれらの点の高さとし、 $g_A, g_B$  を点  $A, B$  における勾配値とする。もし点  $A$  (または  $B$ ) が無拘束な境界勾配条件を持つ等高線上にあれば、その点における勾配  $g_A$  (または  $g_B$ ) は、勾配線に沿う面の勾配の平均値をとる。勾配線は、多数の要素  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を通る。図 5(b) に、勾配線上の要素面の高さ  $h_i$  を実線で示す。終端条件 ( $h_A, g_A, h_B, g_B$ ) を用いて、勾配線 (図 5(b) の破線) 上に、3 次多項式の形式で、予測される高さ  $\bar{h}_i$  曲線を作ることができる。勾配線上の要素パラメータは、各々の要素面

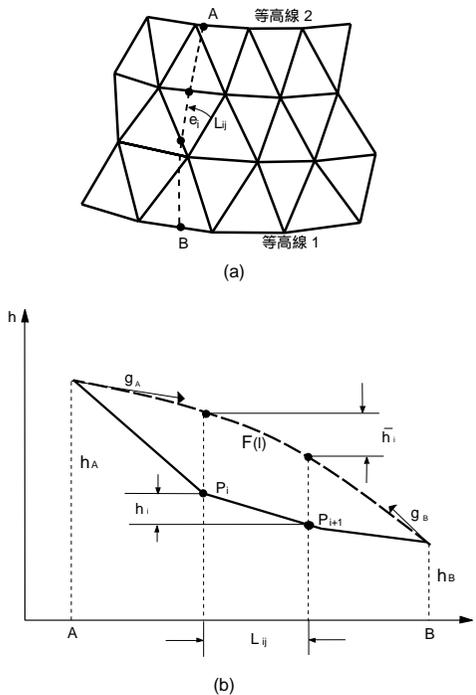


図5 勾配線に沿う面の高さ。(a) 計算面上の勾配線, (b) 勾配線に沿う面の高さ。実線: 計算された高さ曲線, 破線: 予測高さ曲線

Fig. 5 The surface height along a slope line. (a) a slope line on the calculated surface, (b) the surface height along the slope line. solid line: calculated height curve, broken line: predicted height curve.

の高さを予測される高さ分布に近づけるために修正される。勾配線上の、計算された高さ曲線と予測される高さ曲線から、 $e_i$  内の高さの差  $\Delta h_i$  と  $\Delta \bar{h}_i$  (図5(b)参照)は、式(7)、(8)から得られる。 $h = F(l)$ は3次多項式であり、点Aと点Bにおける  $F(l)$  の導関数の値はそれぞれ、 $g_A, g_B$  で与えられ、また、点Aと点Bの座標値は既知であるから、 $F(l)$  が求められる。パッチ上の2点  $P_i$  と  $P_{i+1}$  の座標値を、それぞれ  $(l_i, h_i)$ ,  $(l_{i+1}, h_{i+1})$  とするとき、

$$\Delta h_i = h_i - h_{i+1} \quad (7)$$

$$\Delta \bar{h}_i = F(l_i) - F(l_{i+1}) \quad (8)$$

したがって、 $e_i$  内の要素パラメータに対する修正因子  $f_i$  は次式で得られる。

$$f_i = (\Delta h_i) / (\Delta \bar{h}_i) \quad (9)$$

### (3) 三角形要素中の局所パラメータの修正

1つの要素に複数の勾配線が通ることがある。この場合、これらの線分を1つの因子に結合するのが合理的である。要素  $e_i$  が  $n$  本の勾配線に含まれている場合、要素  $i$  の  $j$  番目 ( $1 \leq j \leq n$ ) の経路長を  $L_{ij}$ , その修正因子を  $f_{ij}$  とすると、三角形要素中の勾配線の統

合修正因子  $f_i$  は次式で得られる。

$$f_i = \left( \sum_j L_{ij} f_{ij} \right) / \left( \sum_j L_{ij} \right) \quad (10)$$

また、その要素の局所パラメータは、次式によって修正される。

$$\sigma_{i(new)} = f_i \sigma_{i(old)} \quad (11)$$

すべての要素の局所パラメータが更新された後、それらは計算面を更新するために、第1段階に戻される。これら2つの段階は、各要素面が許容誤差  $\varepsilon$  の範囲内に収束するまで繰り返される。

$$\left( \sum_j |\Delta g_e| \right) / \left( \sum_j |g_e| \right) \leq \varepsilon \quad (12)$$

ここで、 $g_e$  は三角形要素  $e$  内の正規化勾配ベクトルであり、 $\Delta g_e$  は2つの接続した処理間に生ずる差分である。

### 5.4 三角形要素面の調整

等高線地図は、多数の等高線から構成されているから、計算コストを低減するには、各等高線間ごとに三角形要素面からなる地形面を再構成することが望ましい。すなわち、提案手法では、すべての要素面を、いくつかの隣接等高線によって囲まれる部分領域上で定義する。等高線上に適正な勾配が与えられる場合には、これらの要素面から調整される面は各等高線上において  $C^1$  連続を保証する。しかし実際には、等高線地図は、そのような勾配情報を直接提供しない。したがって、この場合は、次に述べる方法で等高線上の勾配を計算する。

- (1) すべての等高線上で、勾配条件を無拘束にし、三角形要素パラメータを各等高線間で別々に計算する。
- (2) 隣接する要素面を  $C^0$  連続な面に結合し、式(6)を用いて、等高線上のすべての頂点の勾配を計算する。

この等高線上で計算された勾配値を使って、 $C^0$  連続な面を  $C^1$  連続な地形面に調整することができる。

## 6. 適用例

提案した勾配制御 PDE 面の特徴と性能を確認するために、5つの適用例を示す。補間して得られる補助等高線と勾配線を再構成された面とともに示す。数値解析 (FEM) に三角形要素を使用した。ここでは詳細に各要素面を評価するために、3次元表示においても意図的にスムーズシェーディングを行わず、フラットシェーディングを用いる。したがって、等高線と勾配線は折線で示される。

図 6 は、同一の等高線に対する無制御の PDE 面 ( 図 6 (a) ) と勾配制御の PDE 面 ( 図 6 (b) ) との相違を示す。図 6 (a) では、一様な局所パラメータを使用し、図 6 (b) では、勾配境界条件はデフォルト値 ( 5.3 節参照 ) を使用している。面勾配の制御が、面を予期しない湾曲から防いでいることが分かる。図 7 は、勾配制御 PDE 面の形状が、勾配境界条件によって、広域的に制御される様子を示すものである。図 7 (a) は上下面とも凸、と図 7 (b) は上面が凹、下面が凸の場合の形状を示す。勾配境界条件は、0 度から 90 度未満の範囲に限定し、 $\arctan(0.1)$  ( 約 5.7 度 ) から  $\arctan(10.0)$  ( 約 84.3 度 ) の範囲のテストでは問題はなかった。図 8 は、3 つの分岐からなる場合の、より複雑な面を示す。補間により得られる補助等高線と勾配線を図 8 (a) に、また、再構成された面を図 8 (b) に示す。面の分岐に起因する鞍部が自動的に復元されているのが観測される。図 9 は、著しく異なった形状の 2 つの等高線間に発生する計算面を示す。この場合の等高線上の勾配条件は無拘束である。図中の勾配線の集中の度合から、尾根曲線がはっきりと観測される。図 10 は、実在の地図の一部を再構成した地形面を示す。図 10 (a) は単に  $C^0$  連続性を満たしている場合であり、図 10 (b) は  $C^1$  連続性が保証される場合を示す。図 10 (b) の面の補間等高線と勾配線を図 10 (c)

に示す。これらの例から、提案手法が等高線地図から高品質の補助等高線と滑らかな地形面を発生するのに適していることが分かる。

今後の課題として、解の安定性に関する定量的な考察がある。PDE 方程式の逆問題に関する、反復による解の収束の議論が残っている。この問題に関して本論文で取り上げた例以外の数種類の例については、誤差

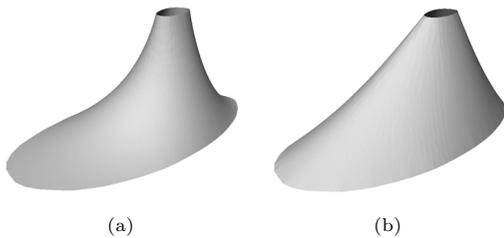


図 6 勾配非制御と勾配制御 PDE 面の相違 : (a) 勾配非制御 PDE 面, (b) 勾配制御 PDE 面  
 Fig. 6 Difference between free-controlled and gradient controlled PDE surfaces. (a) a free controlled PDE surface, (b) a gradient controlled PDE surface.

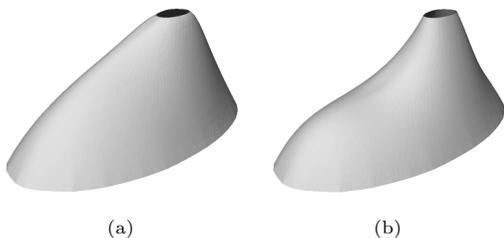


図 7 勾配制御 PDE 面における勾配境界条件の効果  
 Fig. 7 Effects of gradient boundary conditions on gradient controlled PDE surfaces.

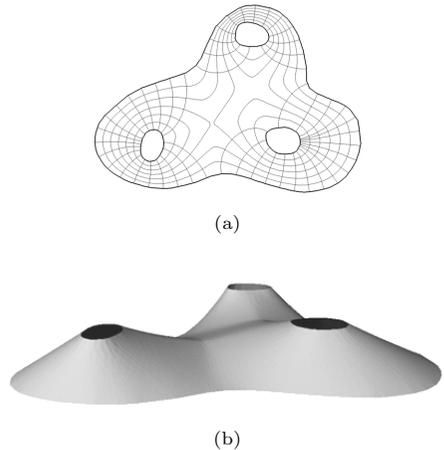


図 8 3 つの分岐を持つ面 : (a) 補助等高線と勾配線, (b) 多角形パッチによる透視図  
 Fig. 8 A surface with three branches: (a) interpolated contours and slope line. (b) perspective view displayed by polygonal patches.

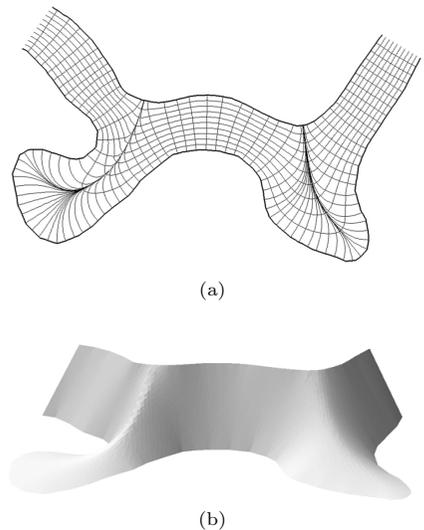


図 9 互いに形状が大きく異なる 2 つの等高線から再構成された面 : (a) 補助等高線と勾配線, (b) 多角形パッチによる透視図  
 Fig. 9 A surface reconstructed from two contours with very different shapes from each other: (a) interpolated contours and slope lines. (b) perspective view displayed by polygonal patches.

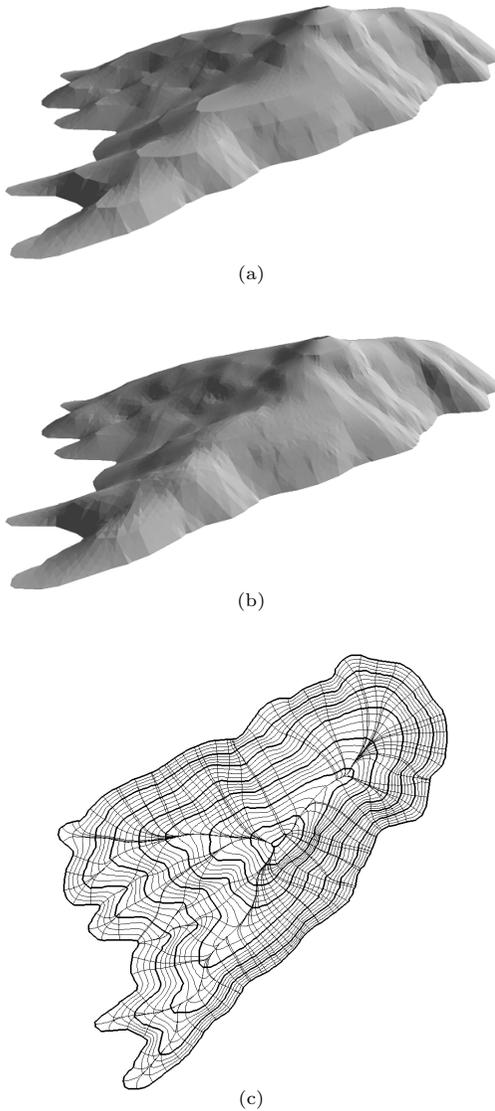


図 10 実在の地図から再構成された面: (a) 等高線を横切る場所での滑らかを考慮しないで再構成された面, (b) 提案手法によって再構成された面, (c) (b) に示す面の補助等高線と勾配線  
 Fig. 10 A surface reconstructed from a part of a real map. (a) the surface reconstructed without consideration of smoothness across the contours. (b) the surface reconstructed by the proposed method. (c) the interpolated contours and slope lines of the surface in (b).

は許容値 1 パーセント以内に収まり, テストしたすべてについて, 3 回から 5 回の反復で収束した. 図 10 (b) の場合の計算時間は, 隣接する等高線間において, 第 1 段階が約 15 秒, 第 2 段階が約 55 秒. メッシュ数は, はじめの粗い 60 から, 細分割されて 3000 (ユーザが指定可). 本適用例では, これらが 6 区間あり, 合計で

420 秒. 総メッシュ数は 18000. 使用計算機は Silicon Graphics 社 Indigo (CPU: R4000 sc/50 MHz, メモリ 112 MB) である.

## 7. 結 論

等高線地図から補助等高線を補間し, 地形面を再構成する新しい方法を提案した. 本手法は, より正確で滑らかな面の再構成を可能にする. 本論文の主な貢献は新しいタイプの PDE 面, すなわち勾配制御 PDE 面が合理的な地形面を表現するために有用なことを示したことである. すなわち, 従来の PDE 面とは異なり, 高さと勾配の両方の境界条件を満足させることができる. 適用例により, 提案手法の有用性が確認され, 複雑な形状の面の復元方法として, 柔軟でかつ高精度であることを示した.

今後の課題として, 前章で述べた解の安定性に関する, より精密な検討と, 等高線上の勾配の評価法の改善, さらに非零の強制項を持つ勾配制御が行える PDE 面に拡張することなどが考えられる. このようなタイプの PDE 面は, 地形モデルの外挿を扱うことを可能にする.

## 参 考 文 献

- 1) Bajaj, C., Coyle, E. and Lin, K.: Arbitrary topology shape reconstruction from planar cross sections, *Graphical models and image processing*, Vol.58, No.6, pp.524-543 (1996).
- 2) Barequet, G. and Sharir, M.: Piecewise-Linear interpolation between polygonal slices, *Computer vision and image understanding*, Vol.63, No.2, pp.251-272 (1996).
- 3) Barrett, W., Mortensen, E. and Taylor, D.: An image space algorithm for morphological contour interpolation, *Graphics Interface '94*, pp.16-24 (1994).
- 4) Bathe, K.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, McGraw-Hill, Prentice-Hall, NJ (1982).
- 5) Bloor, M. and Wilson, M.: Local control of surfaces generated using partial differential equations, *Computer Graphics*, Vol.18, No.2, pp.161-169 (1994).
- 6) Boissonnat, J.: Shape reconstruction from planar cross-sections, *Computer Vision, Graph. Image Proc.*, Vol.44, No.1, pp.1-29 (1988).
- 7) Christiansen, H. and Sederberg, T.: Conversion of complex contour line definitions into polygonal element mosaics, *Computer Graphics*, Vol.12, No.2, pp.187-192 (1978).
- 8) Cingoski, V., Ichinose, M., Kaneda, K. and

- Yamashita, H.: Analytical calculation of magnetic flux lines in 3D space, *IEEE Trans. Magnetics*, Vol.30, No.5, pp.2912–2915 (1994).
- 9) Ekoule, A., Peyrin, F. and Odet, C.: Triangulation algorithm from arbitrary shaped multiple planner contours, *ACM Trans. Graphics*, Vol.10, No.2, pp.182–199 (1991).
- 10) Fuchs, H., Kedem, Z. and Uselton, S.: Approximating complex surface by triangulation of contour lines, *IBM J. Res. Dev.*, Vol.19, pp.2–11 (1975).
- 11) Fuchs, H., Kedem, Z. and Uselton, S.: Optimal surface reconstruction from planer contours, *Comm. ACM*, Vol.10, pp.693–702 (1977).
- 12) Kaneda, K., Kato, F., Nakamae, E. and Nishita, T.: Three dimensional terrain modeling and display for environment assessment, *Computer Graphics*, Vol.23, No.3, pp.207–214 (1989).
- 13) Komatsu, K., Shinagawa, Y., Kunii, T. and Ueda, M.: Terrain shape reconstruction from contours based on shrinking deformation, *Trans. IEICE, D-II* (in Japanese), Vol.79, No.6, pp.1072–1079 (1996).
- 14) Lee, J. and Chung, S.: Reconstruction of 3D terrain data from contour map, *MVA'94 IAPR Workshop on Machine Vision Applications*, pp.281–284 (1994).
- 15) Lounsbery, M., Loop, C., Mann, S., Mayers, D., Painter, J., Derose, T. and Sloan, K.: A testbed for the comparison of parametric surface methods, *SPIE/SPSE symposium on electronic imaging science and technology*, Santa Clara, Calif. (Feb. 1990).
- 16) Meyers, D., Skinner, S. and Sloan, K.: Surface from contours, *ACM Trans. Graphics*, Vol.11, No.3, pp.228–258 (1992).
- 17) Nielson, G.: A method for interpolating scattered data based upon a minimum norm network, *Amer. Math. Soc. Math. Comput.*, Vol.40, pp.253–271 (1983).
- 18) Park, H. and Kim, K.: 3-D shape reconstruction from 2-D cross-sections, *Journal of design and manufacturing*, Vol.5, No.3, pp.171–185 (1995).
- 19) Peter, J.: Smooth mesh interpolation of a mesh of curves, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.22, pp.109–120 (1990).
- 20) Wang, Y. and Aggarwal, J.: Surface reconstruction and representation of 3D scenes, *Pattern recognit.*, Vol.19, No.3, pp.197–207 (1986).
- 21) Zienkiewics, O. and Taylor, R.: *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, London (1988).

(平成 10 年 9 月 3 日受付)

(平成 11 年 12 月 2 日採録)



柴 建雲

1984 年中国清華大学電気工学部卒業。同年同学部講師。1992 年(株)日本ミニモータ, 技術者。1993 年(株)三英技研, 研究員。1999 年中国清華大学電気工学部講師, 現在に至る。変圧器の 3 次元渦電流場の数値計算方法の研究, SRD モータやブラシレス DC モータのシミュレーションシステムの研究開発, 3 次元 CG に関する研究に従事。工学博士。



三好 孝治(正会員)

1976 年広島大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了。1984 年広島工業大学専門学校工業専門課程主任。1994 年広島工業大学環境学部環境デザイン学科講師, 現在に至る。高度情報処理技術者育成教育の方法論の研究, コンピュータ画像処理分野の研究, 3 次元 CG に関する研究に従事。



中前栄八郎(正会員)

1956 年早稲田大学大学院工学研究科修士課程修了。同年広島大学工学部電気工学科助手。1968 年同教授。1992 年広島県立大学経営学部教授。1996 年広島工業大学工学部教授。1999 年(株)三英技研取締役会長, 現在に至る。3 次元 CG に関する研究に従事。工学博士。IEEE, ACM, 電気学会, 電子情報通信学会, 照明学会, 画像電子学会各会員。