2次元Poisson方程式に対する複数双極子の直接的推定法

山谷 克[†] 大中 幸三郎[††]

本論文では，2次元Poisson方程式のソース逆問題に対して，順解析の反復を必要としない直接的な数値解法を提案する．ソース項として，複数個の双極子によるモデルに着目し，境界上におけるポテンシャルの観測データを用いて双極子の位置およびモーメントの推定を試みる．提案する解法は調和関数を用いた境界積分表示に基づき，各々の双極子を順次同定するものである．また，推定対象となる双極子の配置に関して分離条件を提示し，その条件下での理論的な解の収束性を保証する．さらに，円領域内の双極子推定問題に対し，いくつかの数値計算結果を示す．

Direct Estimation of Dipoles for Two-dimensional Poisson Equation

Katsu Yamatani[†] and Kohzaburo Ohnaka[††]

An inverse source problem is considered for the two-dimensional Poisson equation. The source term is expressed by a sum of dipoles, where locations and moments of these dipoles are unknown and the number of dipoles is known. We propose a direct numerical method estimating unknown dipoles one after another under the condition that the potential can be observed on the boundary. The method is based on the weighted residual approach using harmonic functions as weighting functions. The effectiveness of the method is illustrated with numerical examples where unknown dipoles are located on a disk domain.

1. はじめに

工学をはじめとする種々の分野において，境界における観測データを用いた領域内部の未知ソースの推定に関する研究が進められている．このような問題は一般にソース逆問題と呼ばれ，数値的あるいは理論的に数多くの成果が発表されている[1),4)~6)]．なかでも重力場，静電場あるいは定常熱伝導などの定常現象はPoisson方程式によって記述される場合が多く，Poisson方程式を対象とするソース逆問題は重要な研究対象となっている[2),3),7)]．ソース逆問題では想定する問題に応じて種々のソースモデルが用いられるが，ここでは2次元領域内の数個の双極子から構成される双極子モデルに着目する．すなわち，2次元領域内部に位置およびモーメントが未知の数個の双極子が存在するものとして，境界上の離散点におけるポテンシャルの観測データから，これら未知情報の推定を試みる．ただし，双極子の個数については既知とする．

双極子推定の数値解法としては，順解析によって得られた計算値と観測データとの残差を最小化する間接的な解法が主に用いられているが，複数個の双極子推定について初期値の選定や解の収束性を含めた議論はほとんどなされていない．本論文で提案する解法は，調和関数を用いた境界積分表示に基づき，各々の双極子を順次同定する直接的なアプローチである．この解法は，3章で述べる分離条件の下で適切な調和関数を用いれば，得られた推定値が理論的に真の解に一致することを保証することができる．一方，数値的側面からは離散化誤差や累積誤差の影響による推定誤差が不可避となるが，得られた解を初期値とする反復解法によって解の精度改良が可能となることをいくつかの数値例によって示す．これらの数値例では，観測データが誤差を含む場合についても検討し，実用的な面からの有効性についても検証する．

2. 基礎方程式の構成

区分的になめらかな境界 Γ で囲まれた2次元有界領域 Ω におけるPoisson方程式

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\right) u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \qquad (1)$$

を考える．ソース項 $f(\boldsymbol{x})$ は双極子モデル

† 静岡大学工学部
Faculty of Engineering, Shizuoka University
†† 大阪大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Osaka University

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho} \left\{ \delta\left(\boldsymbol{x} - \left(\boldsymbol{q}_i + \frac{\rho}{2}\boldsymbol{m}_i\right)\right) - \delta\left(\boldsymbol{x} - \left(\boldsymbol{q}_i - \frac{\rho}{2}\boldsymbol{m}_i\right)\right)\right\},$$
$$\boldsymbol{q}_i \in \Omega,\ \boldsymbol{q}_i \neq \boldsymbol{q}_j\,(i \neq j),\ |\boldsymbol{m}_i| > 0 \quad (2)$$

で表される．ただし $\boldsymbol{q}_i$ と $\boldsymbol{m}_i$ はそれぞれ双極子の位置および双極子モーメントである．支配方程式 (1) の解 u の外向き法線微分 $\partial u/\partial \boldsymbol{n}$ は

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma \quad (3)$$

を満足するものとし，境界上における u の観測データから双極子の位置 $\boldsymbol{q}_i$ および双極子モーメント $\boldsymbol{m}_i$ の推定を試みる．ただし，双極子の個数 N については既知とする．

領域 Ω の内部に存在する双極子と境界上の観測データとを関連付けるために，適当な調和関数 $w(\boldsymbol{x})$ を重み関数とする次式の積分表示を用いる．

$$\int_\Omega w(\boldsymbol{x})\Delta u(\boldsymbol{x})\, d\Omega = \int_\Omega w(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\, d\Omega. \quad (4)$$

領域 Ω の内部における u は未知であり，領域 Ω に関する左辺の積分を直接求めることは不可能である．そこで，左辺の領域積分に対して Green の定理を適用すると，$\Delta w = 0$ および式 (3) の境界条件から

$$-\int_\Gamma u(\boldsymbol{x}) \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) d\Gamma = \int_\Omega w(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\, d\Omega \quad (5)$$

が成立し，式 (2) を代入することによって未知パラメータに関する方程式

$$I(w) \equiv -\int_\Gamma u(\boldsymbol{x}) \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) d\Gamma = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{m}_i \cdot \nabla w(\boldsymbol{q}_i) \quad (6)$$

を得る．境界積分 $I(w)$ の値は境界上で与えられた観測データ $u(\boldsymbol{x})$ と調和関数 $w(\boldsymbol{x})$ から求めることができる．次章では $w(\boldsymbol{x})$ として用いる調和関数を具体的に示すとともに，方程式 (6) に基づく双極子の推定法について述べる．

3. 調和関数を用いた双極子推定法

方程式 (6) を未知パラメータについて解くのは容易でないが，$w(\boldsymbol{x})$ として適切な調和関数を用いれば，未知パラメータの推定が可能となることを示す．

互いに直交する単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \boldsymbol{e}_\phi = (\cos\phi, \sin\phi),$$
$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

を基底とする直交座標系 $(\xi_\theta, \xi_\phi) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_\phi)$ を導入し，適当な定数 $a\,(>0)$ から定められる調和関数

$$\begin{aligned} w_1(\xi_\theta,\xi_\phi) &= e^{a\xi_\theta}\cos a\xi_\phi, \\ w_2(\xi_\theta,\xi_\phi) &= e^{a\xi_\theta}\sin a\xi_\phi, \\ w_3(\xi_\theta,\xi_\phi) &= \xi_\theta w_1(\xi_\theta,\xi_\phi) - \xi_\phi w_2(\xi_\theta,\xi_\phi), \\ w_4(\xi_\theta,\xi_\phi) &= \xi_\theta w_2(\xi_\theta,\xi_\phi) + \xi_\phi w_1(\xi_\theta,\xi_\phi) \end{aligned} \quad (7)$$

を重み関数として用いる．以下では $\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{m}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ の $\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\phi$ 成分を次のように表記する．

$$q_{i\theta} = \boldsymbol{q}_i \cdot \boldsymbol{e}_\theta, \quad q_{i\phi} = \boldsymbol{q}_i \cdot \boldsymbol{e}_\phi,$$
$$m_{i\theta} = \boldsymbol{m}_i \cdot \boldsymbol{e}_\theta, \quad m_{i\phi} = \boldsymbol{m}_i \cdot \boldsymbol{e}_\phi.$$

調和関数 $w_\ell(\xi_\theta,\xi_\phi)\,(\ell = 1,2,3,4)$ を用いた場合，式 (6) は明らかに

$$\begin{aligned} I(w_\ell) &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{m}_i \cdot \nabla w_\ell(q_{i\theta}, q_{i\phi}) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ m_{i\theta} \frac{\partial w_\ell}{\partial \xi_\theta}(q_{i\theta}, q_{i\phi}) + m_{i\phi} \frac{\partial w_\ell}{\partial \xi_\phi}(q_{i\theta}, q_{i\phi}) \right\} \end{aligned}$$

となる．したがって $w_1(\xi_\theta,\xi_\phi) = e^{a\xi_\theta}\cos a\xi_\phi$ と $w_2(\xi_\theta,\xi_\phi) = e^{a\xi_\theta}\sin a\xi_\phi$ に対し

$$I(w_1) = \sum_{i=1}^{N} a e^{a q_{i\theta}} \psi_{Ai},\ I(w_2) = \sum_{i=1}^{N} a e^{a q_{i\theta}} \psi_{Bi} \quad (8)$$

を得る．ただし ψ_{Ai} と ψ_{Bi} はそれぞれ

$$\begin{aligned} \psi_{Ai} &= m_{i\theta}\cos a q_{i\phi} - m_{i\phi}\sin a q_{i\phi}, \\ \psi_{Bi} &= m_{i\theta}\sin a q_{i\phi} + m_{i\phi}\cos a q_{i\phi} \end{aligned} \quad (9)$$

を表すものとする．同様に調和関数 w_3 および w_4 についても次式が成立する．

$$\begin{aligned} I(w_3) &= \sum_{i=1}^{N} e^{a q_{i\theta}} \{a(q_{i\theta}\psi_{Ai} - q_{i\phi}\psi_{Bi}) + \psi_{Ai}\}, \\ I(w_4) &= \sum_{i=1}^{N} e^{a q_{i\theta}} \{a(q_{i\theta}\psi_{Bi} + q_{i\phi}\psi_{Ai}) + \psi_{Bi}\}. \end{aligned} \quad (10)$$

ここで，境界積分 $I(w_\ell)$ を用いて

$$S_1 = \frac{I(w_1)}{a},\ S_2 = \frac{I(w_2)}{a},\ S_3 = \frac{I(w_3)}{a} - \frac{I(w_1)}{a^2},$$
$$S_4 = \frac{I(w_4)}{a} - \frac{I(w_2)}{a^2} \quad (11)$$

とすると，式 (8) および (10) から明らかに

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N} e^{a q_{i\theta}} \psi_{Ai}, \quad S_2 = \sum_{i=1}^{N} e^{a q_{i\theta}} \psi_{Bi},$$
$$S_3 = \sum_{i=1}^{N} e^{a q_{i\theta}} \left(q_{i\theta}\psi_{Ai} - q_{i\phi}\psi_{Bi}\right),$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^{N} e^{aq_{i\theta}} \left(q_{i\theta}\psi_{Bi} + q_{i\phi}\psi_{Ai}\right) \tag{12}$$

となる．上式の S_1 と S_2 について k 番目の双極子に着目すると，ψ_{Ak} および ψ_{Bk} は

$$\begin{aligned}\psi_{Ak} &= e^{-aq_{k\theta}} S_1 - \sum_{i\neq k} e^{a(q_{i\theta}-q_{k\theta})}\psi_{Ai},\\ \psi_{Bk} &= e^{-aq_{k\theta}} S_2 - \sum_{i\neq k} e^{a(q_{i\theta}-q_{k\theta})}\psi_{Bi}\end{aligned} \tag{13}$$

と表される．さらに S_3 と S_4 についても同様に

$$\begin{aligned}q_{k\theta}\psi_{Ak} - q_{k\phi}\psi_{Bk} &= e^{-aq_{k\theta}} S_3\\ &\quad - \sum_{i\neq k} e^{a(q_{i\theta}-q_{k\theta})}\left(q_{i\theta}\psi_{Ai} - q_{i\phi}\psi_{Bi}\right),\\ q_{k\theta}\psi_{Bk} + q_{k\phi}\psi_{Ak} &= e^{-aq_{k\theta}} S_4\\ &\quad - \sum_{i\neq k} e^{a(q_{i\theta}-q_{k\theta})}\left(q_{i\theta}\psi_{Bi} + q_{i\phi}\psi_{Ai}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

が得られることから，式 (13) を式 (14) の左辺に代入すれば次式が成立する．

$$\begin{aligned}q_{k\theta}(e^{-aq_{k\theta}} S_1) - q_{k\phi}(e^{-aq_{k\theta}} S_2) &= e^{-aq_{k\theta}} S_3 + \Psi_A,\\ q_{k\theta}(e^{-aq_{k\theta}} S_2) + q_{k\phi}(e^{-aq_{k\theta}} S_1) &= e^{-aq_{k\theta}} S_4 + \Psi_B.\end{aligned} \tag{15}$$

ただし，Ψ_A と Ψ_B は

$$\begin{aligned}\Psi_A &= \sum_{i\neq k} e^{a(q_{i\theta}-q_{k\theta})}\left\{(q_{k\theta}-q_{i\theta})\psi_{Ai}\right.\\ &\qquad \left. - (q_{k\phi}-q_{i\phi})\psi_{Bi}\right\},\\ \Psi_B &= \sum_{i\neq k} e^{a(q_{i\theta}-q_{k\theta})}\left\{(q_{k\theta}-q_{i\theta})\psi_{Bi}\right.\\ &\qquad \left. + (q_{k\phi}-q_{i\phi})\psi_{Ai}\right\}\end{aligned} \tag{16}$$

である．

調和関数 w_ℓ はベクトル $\boldsymbol{e}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ 方向に関して指数的に変化する関数であり，定数 a が大きいほどその値は急激に変化する．このベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ に関して，$\boldsymbol{q}_k$ の $\boldsymbol{e}_\theta$ 成分 $q_{k\theta}$ が k 番目を除く任意の双極子の $\boldsymbol{e}_\theta$ 成分よりも大きくなるような θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ に存在するならば，この θ のとりうる区間を I_k と表すものとする．この区間 I_k については，$\boldsymbol{e}_\theta$ 成分の θ に関する周期性から次式に示す表記が可能となる（**図 1** 参照）．

$$I_k = \begin{cases}\{\theta \mid \theta_k < \theta < \theta_k + \delta_k\}, & \theta_k + \delta_k \leq 2\pi\\ \{\theta \mid \theta_k < \theta < 2\pi,\\ \quad 0 \leq \theta < \theta_k + \delta_k - 2\pi\}, & \theta_k + \delta_k > 2\pi\end{cases}$$

ただし $0 \leq \theta_k < 2\pi$ および $\delta_k > 0$ とする．また，$q_{k\theta} > \max_{i\neq k} q_{i\theta}$ となるような $\boldsymbol{e}_\theta$ が存在しない場合には区間幅 δ_k を 0 と定義すると，$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$ は次式を満足する．

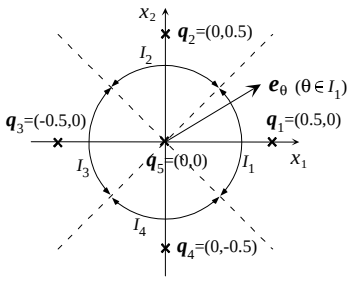

図 1 区間 I_k の設定例
Fig. 1 An example of the interval I_k.

$$\delta_1 + \cdots + \delta_N = 2\pi, \quad \max_{1\leq k\leq N} \delta_k \geq \frac{2\pi}{N} > 0. \tag{17}$$

推定対象は相異なる位置に存在する有限個の双極子であり，少なくともある 1 つの双極子，ここでは k 番目の双極子に対して

[条件 1]

$$c_k \equiv \min_{1\leq i\leq N,\, i\neq k} (q_{k\theta} - q_{i\theta}) > 0$$

となる単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ が必ず存在する．以下の議論で用いる単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ は，この条件 1 を満足しているものとする．

双極子の位置 $\boldsymbol{q}_k$ を求めるために，式 (15) を左辺の $q_{k\theta}$ と $q_{k\phi}$ に関して解くことを考える．このためには係数行列

$$A = \begin{pmatrix} e^{-aq_{k\theta}} S_1 & -e^{-aq_{k\theta}} S_2\\ e^{-aq_{k\theta}} S_2 & e^{-aq_{k\theta}} S_1\end{pmatrix}$$

に対して $\det A \neq 0$ を示す必要があるが，条件 1 の下では式 (12) より，十分大きな a に対して

$$\begin{aligned}\det A &= e^{-2aq_{k\theta}}\left({S_1}^2 + {S_2}^2\right)\\ &\simeq (\psi_{Ak})^2 + (\psi_{Bk})^2\\ &= {m_{k\theta}}^2 + {m_{k\phi}}^2 = |\boldsymbol{m}_k|^2 > 0\end{aligned}$$

となる．したがって a を十分大きくとれば，式 (15) より $q_{k\theta}$ と $q_{k\phi}$ は

$$\begin{aligned}q_{k\theta} &= \frac{e^{-2aq_{k\theta}}(S_1S_3 + S_2S_4) + e^{-aq_{k\theta}}(S_1\Psi_A + S_2\Psi_B)}{e^{-2aq_{k\theta}}\left({S_1}^2 + {S_2}^2\right)},\\ q_{k\phi} &= \frac{e^{-2aq_{k\theta}}(S_1S_4 - S_2S_3) + e^{-aq_{k\theta}}(S_1\Psi_B - S_2\Psi_A)}{e^{-2aq_{k\theta}}\left({S_1}^2 + {S_2}^2\right)}\end{aligned} \tag{18}$$

と表される．境界積分から決まる S_1，S_2，S_3 および

S_4 を用いて $\widetilde{\boldsymbol{q}}(a,\theta)$ を

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}(a,\theta)=\frac{S_1S_3+S_2S_4}{{S_1}^2+{S_2}^2}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{S_1S_4-S_2S_3}{{S_1}^2+{S_2}^2}\boldsymbol{e}_\phi \tag{19}$$

とすると，$\boldsymbol{q}_k = q_{k\theta}\boldsymbol{e}_\theta + q_{k\phi}\boldsymbol{e}_\phi$ と式 (18) から明らかに

$$|\boldsymbol{q}_k-\widetilde{\boldsymbol{q}}(a,\theta)|=\sqrt{\frac{\{\Psi_A\}^2+\{\Psi_B\}^2}{\det A}} \tag{20}$$

である．一方，式 (9)，(16) および条件 1 から

$$\begin{aligned}|\Psi_A| &\le e^{-ac_k}\sum_{i\neq k}|\boldsymbol{q}_k-\boldsymbol{q}_i||\boldsymbol{m}_i|,\\ |\Psi_B| &\le e^{-ac_k}\sum_{i\neq k}|\boldsymbol{q}_k-\boldsymbol{q}_i||\boldsymbol{m}_i|\end{aligned} \tag{21}$$

となり，式 (21) を (20) に代入すると，十分大きな a に対して次の評価を得る．

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{q}_k-\widetilde{\boldsymbol{q}}(a,\theta)| &\le \frac{\sqrt{2}\,e^{-ac_k}}{\sqrt{\det A}}\sum_{i\neq k}|\boldsymbol{q}_k-\boldsymbol{q}_i||\boldsymbol{m}_i|\\ &\simeq\left(\frac{\sqrt{2}}{|\boldsymbol{m}_k|}\sum_{i\neq k}|\boldsymbol{q}_k-\boldsymbol{q}_i||\boldsymbol{m}_i|\right)e^{-ac_k}.\end{aligned} \tag{22}$$

すなわち，条件 1 を満足する $\boldsymbol{e}_\theta$ と十分大きな a に対して $\widetilde{\boldsymbol{q}}(a,\theta)\simeq\boldsymbol{q}_k$ を得る．

次に双極子モーメントの推定について述べる．式 (9) において $i=k$ とすると

$$\begin{aligned}\psi_{Ak} &= m_{k\theta}\cos aq_{k\phi}-m_{k\phi}\sin aq_{k\phi},\\ \psi_{Bk} &= m_{k\theta}\sin aq_{k\phi}+m_{k\phi}\cos aq_{k\phi}\end{aligned}$$

であり，上式で与えられる ψ_{Ak} と ψ_{Bk} を式 (13) に代入し，$m_{k\theta}$ および $m_{k\phi}$ について解く．

$$\begin{aligned}m_{k\theta} &= e^{-aq_{k\theta}}(S_1\cos aq_{k\phi}+S_2\sin aq_{k\phi})\\ &\quad-\sum_{i\neq k}e^{a(q_{i\theta}-q_{k\theta})}(\psi_{Ai}\cos aq_{k\phi}+\psi_{Bi}\sin aq_{k\phi}),\\ m_{k\phi} &= e^{-aq_{k\theta}}(S_2\cos aq_{k\phi}-S_1\sin aq_{k\phi})\\ &\quad-\sum_{i\neq k}e^{a(q_{i\theta}-q_{k\theta})}(\psi_{Bi}\cos aq_{k\phi}-\psi_{Ai}\sin aq_{k\phi}).\end{aligned} \tag{23}$$

まず $m_{k\theta}$ の右辺第 2 項について，条件 1 と式 (9) より

$$\begin{aligned}&\lim_{a\to\infty}\sum_{i\neq k}e^{a(q_{i\theta}-q_{k\theta})}|\psi_{Ai}\cos aq_{k\phi}+\psi_{Bi}\sin aq_{k\phi}|\\ &\le\lim_{a\to\infty}\sum_{i\neq k}e^{-ac_k}|\boldsymbol{m}_i|=0\end{aligned} \tag{24}$$

となることから，十分大きな a に対して

$$m_{k\theta}\simeq e^{-aq_{k\theta}}(S_1\cos aq_{k\phi}+S_2\sin aq_{k\phi})$$

が成立する．ここで $\widetilde{\boldsymbol{q}}(a,\theta)=\widetilde{q}_{k\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\widetilde{q}_{k\phi}\boldsymbol{e}_\phi$ と表すと，式 (22) より

$$a|q_{k\theta}-\widetilde{q}_{k\theta}|\simeq 0,\quad a|q_{k\phi}-\widetilde{q}_{k\phi}|\simeq 0$$

であり，モーメント $\boldsymbol{m}_k$ の $\boldsymbol{e}_\theta$ 成分の近似

$$\widetilde{m}_{k\theta}=e^{-a\widetilde{q}_{k\theta}}(S_1\cos a\widetilde{q}_{k\phi}+S_2\sin a\widetilde{q}_{k\phi})$$

が得られる．同様に $\boldsymbol{e}_\phi$ 成分の近似を

$$\widetilde{m}_{k\phi}=e^{-a\widetilde{q}_{k\theta}}(S_2\cos a\widetilde{q}_{k\phi}-S_1\sin a\widetilde{q}_{k\phi})$$

とし，$\widetilde{\boldsymbol{m}}(a,\theta)=\widetilde{m}_{k\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\widetilde{m}_{k\phi}\boldsymbol{e}_\phi$ とおくと，十分大きな a に対して $\widetilde{\boldsymbol{m}}(a,\theta)\simeq\boldsymbol{m}_k$ となる．

さらに k 番目の双極子に対して十分な精度の推定結果がすでに得られているとすると，式 (12) において k 番目の双極子に関する項を取り除くことによって，k 番目以外の双極子に関する方程式が得られる．すなわち

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_{Ak} &= \widetilde{m}_{k\theta}\cos a\widetilde{q}_{k\phi}-\widetilde{m}_{k\phi}\sin a\widetilde{q}_{k\phi},\\ \widetilde{\psi}_{Bk} &= \widetilde{m}_{k\theta}\sin a\widetilde{q}_{k\phi}+\widetilde{m}_{k\phi}\cos a\widetilde{q}_{k\phi}\end{aligned}$$

とし，$\widetilde{\boldsymbol{q}}(a,\theta)$，$\widetilde{\boldsymbol{m}}(a,\theta)$ を次式の $\widetilde{S}_1$，$\widetilde{S}_2$，$\widetilde{S}_3$，$\widetilde{S}_4$ から再計算する．

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_1 &= S_1-e^{a\widetilde{q}_{k\theta}}\widetilde{\psi}_{Ak},\quad \widetilde{S}_2=S_2-e^{a\widetilde{q}_{k\theta}}\widetilde{\psi}_{Bk},\\ \widetilde{S}_3 &= S_3-e^{a\widetilde{q}_{k\theta}}\left(\widetilde{q}_{k\theta}\widetilde{\psi}_{Ak}-\widetilde{q}_{k\phi}\widetilde{\psi}_{Bk}\right),\\ \widetilde{S}_4 &= S_4-e^{a\widetilde{q}_{k\theta}}\left(\widetilde{q}_{k\theta}\widetilde{\psi}_{Bk}+\widetilde{q}_{k\phi}\widetilde{\psi}_{Ak}\right).\end{aligned} \tag{25}$$

このとき $\widetilde{\boldsymbol{q}}(a,\theta)$，$\widetilde{\boldsymbol{m}}(a,\theta)$ には k 番目以外の双極子に関する情報のみが含まれていることから，

$$c_{k'}=\min_{1\le i\le N,\,i\neq k,k'}(q_{k'\theta}-q_{i\theta})>0$$

を満足する $\boldsymbol{e}_\theta$ と十分大きな a に対して

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}(a,\theta)\simeq\boldsymbol{q}_{k'},\quad \widetilde{\boldsymbol{m}}(a,\theta)\simeq\boldsymbol{m}_{k'}$$

が成立する．同様にして推定が終了した双極子に関する項を順次 S_1，S_2，S_3，S_4 から取り除くことによって，すべての双極子の推定が可能となる．

4. 反復解法による精度改良および誤差評価

前章では，条件 1 の下で十分大きな a をとれば

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}(a,\theta)\simeq\boldsymbol{q}_k,\quad \widetilde{\boldsymbol{m}}(a,\theta)\simeq\boldsymbol{m}_k$$

となることを示した．しかし実用的には，境界積分 (6) の計算は境界上の離散点におけるポテンシャル u の観測値を用いた数値積分によるため，計算に用いる a の大きさには制約を設けなければならない．そこで，前章で述べた解法による推定結果を初期値とし，反復計算によって推定値の精度を高めることを考える．ここでは $\boldsymbol{q}_i=(q_{i1},q_{i2})$，$\boldsymbol{m}_i=(m_{i1},m_{i2})$ とし，$\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^{4N}$ は推定対象の真値

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}=(&q_{11},q_{12},q_{21},q_{22},\ldots,q_{N1},q_{N2},\\ &m_{11},m_{12},m_{21},m_{22},\ldots,m_{N1},m_{N2})\end{aligned}$$

を表す．また本章で述べる反復計算によって得られる推定値を $\boldsymbol{q}_i^{(t)} = (q_{i1}^{(t)}, q_{i2}^{(t)})$，$\boldsymbol{m}_i^{(t)} = (m_{i1}^{(t)}, m_{i2}^{(t)})$，さらに

$$\boldsymbol{v}^{(t)} = (q_{11}^{(t)}, \ldots, m_{N2}^{(t)}), \quad t = 0, 1, \ldots$$

と表記し，初期推定値 $\boldsymbol{v}^{(0)}$ は前章での議論に従って定める．

まず，式 (12) に示す各式の右辺を真値ベクトル $\boldsymbol{v}$ の関数と見なし，次のように表す．

$$S_\ell = g_\ell(\boldsymbol{v}), \quad \ell = 1, 2, 3, 4. \tag{26}$$

次に，1 番目から N 番目の双極子の推定に用いる調和関数それぞれに対して式 (26) に相当する方程式が得られることから，式 (26) を次のように書き直す．

$$S_{k\ell} = g_{k\ell}(\boldsymbol{v}), \ k = 1, 2, \ldots, N, \ \ell = 1, 2, 3, 4.$$

さらに $\boldsymbol{S} = (S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, \ldots, S_{N4})$ および $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}) = (g_{11}(\boldsymbol{v}), \ldots, g_{N4}(\boldsymbol{v}))$ とし，$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})$ の解 $\boldsymbol{v}$ をニュートン法によって求める．

$$\{\boldsymbol{v}^{(t+1)}\}^T = {J_g}^{-1}\{\boldsymbol{S} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}^{(t)})\}^T + \{\boldsymbol{v}^{(t)}\}^T.$$

ただし J_g は $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}^{(t)})$ の Jacobi 行列である．

ニュートン法の ${J_g}^{-1}$ については解析的に求めることが可能であるが，ベクトル $\boldsymbol{S}$ を定めるためには $S_{k\ell}$ の数値積分が必要となる．ベクトル $\boldsymbol{S}$ の数値積分結果を $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ とすると，推定誤差 $\varepsilon_t = \left|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^{(t)}\right|$ に関する形式的な評価として次式を得る．

$$\varepsilon_{t+1} < \sqrt{\lambda_t}\left(|\boldsymbol{S} - \widetilde{\boldsymbol{S}}| + O(\varepsilon_t^2)\right). \tag{27}$$

ただし λ_t は行列 $({J_g}^{-1})^T\,({J_g}^{-1})$ の最大固有値である．

誤差評価 (27) には $S_{k\ell}$ の計算，すなわち境界積分 $I(w)$ の計算に起因する誤差 $|\boldsymbol{S} - \widetilde{\boldsymbol{S}}|$ が含まれる．最後に，この誤差を軽減する方法について考える．ソース項 $f(\boldsymbol{x})$ の未知パラメータ $\boldsymbol{q}_i$ と $\boldsymbol{m}_i$ をそれぞれ計算値 $\boldsymbol{q}_i^{(t)}$ および $\boldsymbol{m}_i^{(t)}$ で置き換えたものを $f^{(t)}(\boldsymbol{x})$ と表し，次式の Poisson 方程式の解 $u^{(t)}$ を利用する．

$$\left.\begin{aligned} \Delta u^{(t)}(\boldsymbol{x}) &= f^{(t)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u^{(t)}}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) &= 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

ただし，境界 Γ 上の 1 点で $u^{(t)} = u$ を満足するものとする．解 $u^{(t)}$ を用いると，式 (6) の導出と同様にして

$$-\int_\Gamma u^{(t)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})d\Gamma = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{m}_i^{(t)} \cdot \nabla w(\boldsymbol{q}_i^{(t)}) \tag{29}$$

が得られ，上式および式 (6) から

$$I(w) = -\int_\Gamma \left\{u(\boldsymbol{x}) - u^{(t)}(\boldsymbol{x})\right\}\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})d\Gamma + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{m}_i^{(t)} \cdot \nabla w(\boldsymbol{q}_i^{(t)}) \tag{30}$$

となる．右辺第 1 項の被積分関数に関して，$\boldsymbol{v}^{(t)} = \boldsymbol{v}$ ならば明らかに $u(\boldsymbol{x}) - u^{(t)}(\boldsymbol{x}) = 0$ である．すなわち，積分表示 (30) を用いれば，推定ベクトル $\boldsymbol{v}^{(t)}$ の精度が改良されるに従って，数値積分の誤差を小さくすることができる．

5. 適 用 例

本章では，3，4 章で述べた数値解法の有効性を数値例によって確認する．ここでは Ω を原点を中心とする半径 1 の円領域とし，Poisson 方程式 (1) の解 u の観測データが等間隔に配置された境界上の M 個の点で与えられるものとする．また，境界積分の計算には台形公式を用いる．

3 章では調和関数 w_ℓ に対する基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ が条件 1 を満足すればよいことを示した．条件 1 を満足する場合には，式 (22) の評価式から e^{-ac_k} 程度の推定精度が得られるものと考えることができる．すなわち a の値を十分大きくとれば解の収束性は保証されている．しかし実際の数値計算では a の値を無制限に大きくとることは許されず，単に条件 1 を満足するだけではなく，できるだけ大きな c_k を与える基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ を決めることが重要となる．

基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ の選択方法について述べる．まず $\delta = \pi/N$ に対して

$$\gamma(\theta) = |\widetilde{\boldsymbol{q}}(a, \theta + \delta/2) - \widetilde{\boldsymbol{q}}(a, \theta - \delta/2)|$$

とすると，式 (17) に示す $\delta < 2\pi/N \leq \max_{1 \leq k \leq N} \delta_k$ より $[\theta - \delta/2, \theta + \delta/2] \subset I_k$ となる θ と I_k の組が少なくとも 1 組存在し，この場合は十分大きな a に対して $\gamma(\theta) \simeq 0$ かつ $\widetilde{\boldsymbol{q}}(a, \theta) \simeq \boldsymbol{q}_k$ となる．したがって，$\gamma(\theta) \simeq 0$ となるような θ に対して $\widetilde{\boldsymbol{q}}(a, \theta)$ を求めることができれば双極子の位置 $\boldsymbol{q}_k$ の推定が可能となる．また，双極子モーメントに関しても同様である．

前章で式 (28) の解 $u^{(t)}$ を用いた境界積分の精度改良について述べたが，円領域 Ω の場合，式 (28) を満足する $u^{(t)}$ の境界値は

$$u^{(t)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^N \frac{\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_i^{(t)}\right) \cdot \boldsymbol{m}_i^{(t)}}{\left|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}_i^{(t)}\right|^2} + C, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma, \quad C: \text{定数} \tag{31}$$

によって解析的に与えられる．ある 1 つの観測点で

$u^{(t)} = u$ となるように定数 C を定め，$u^{(t)}$ および u の観測データから $I(w)$ を計算する．さらに推定誤差の評価 (27) において，$\varepsilon_t = \left|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^{(t)}\right| \ll 1$ すなわち $|u - u^{(t)}| \ll 1$ ならば式 (30) の右辺第 1 項に起因する誤差は無視できるほどに小さくなるものと考えられる．したがって，初期推定値 $\boldsymbol{v}^{(0)}$ が十分な精度で得られているものと仮定すれば $\varepsilon_{t+1} \ll \varepsilon_t$ となり，実用的には次の誤差評価が有効となる．

$$\varepsilon_{t+1} \ll \left|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^{(t)}\right| \simeq \left|\boldsymbol{v}^{(t+1)} - \boldsymbol{v}^{(t)}\right| \equiv \widetilde{\varepsilon}_{t+1}.$$

まず 3 章の図 1 に示した $N = 5$ の例について，それぞれの双極子に対して双極子モーメント $\boldsymbol{m}_i$ を次式で与え，解 u の境界上における観測点の数を $M = 30$ としてこれらの双極子の推定を試みる．

$$\boldsymbol{m}_i = \big(0.1\cos(2\pi i/N),\, 0.1\sin(2\pi i/N)\big), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \qquad (32)$$

実際の計算での $\gamma(\theta)$ の値は，θ によらず定数 a がある一定の大きさを超えると急激に発散する傾向がみられた．これは境界積分における被積分関数のデータが M 個の離散点でしか与えられていないためと考えられる．したがって，あらかじめ $\gamma(\theta)$ の値が発散しない範囲で，できるだけ大きな a を実験的に求め，この実験的に求めた定数 a に対して $\gamma(\theta) \simeq 0$ となる $\theta \in [0, 2\pi)$ を用いた．この例で用いた定数 a の最大値は 10 である．3 章の議論に従って求めた初期推定値 $\boldsymbol{q}_i^{(0)}$ と $\boldsymbol{m}_i^{(0)}$ の推定誤差 $E_{qi}^{(0)} = |\boldsymbol{q}_i^{(0)} - \boldsymbol{q}_i|$, $E_{mi}^{(0)} = |\boldsymbol{m}_i^{(0)} - \boldsymbol{m}_i|$ を以下に示す．

$$\begin{aligned}
E_{q1}^{(0)} &= 1.0 \times 10^{-2}, & E_{m1}^{(0)} &= 9.3 \times 10^{-3},\\
E_{q2}^{(0)} &= 9.3 \times 10^{-3}, & E_{m2}^{(0)} &= 9.2 \times 10^{-3},\\
E_{q3}^{(0)} &= 5.5 \times 10^{-3}, & E_{m3}^{(0)} &= 5.2 \times 10^{-3},\\
E_{q4}^{(0)} &= 1.3 \times 10^{-2}, & E_{m4}^{(0)} &= 1.3 \times 10^{-2},\\
E_{q5}^{(0)} &= 8.3 \times 10^{-2}, & E_{m5}^{(0)} &= 1.7 \times 10^{-2}.
\end{aligned}$$

さらに推定値 $\boldsymbol{v}^{(t)}$ の真値 $\boldsymbol{v}$ に対する誤差 $\varepsilon_t = \left|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^{(t)}\right|$ とその誤差評価 $\widetilde{\varepsilon}_t$ を**図 2** に示す．ただし，$\widetilde{\varepsilon}_t < 10^{-5}$ となれば反復計算を停止するものとする．

次に，各々の双極子が近接して存在する場合を考える．双極子の個数を $N = 3$ とし，それぞれの双極子の位置 $\boldsymbol{q}_i$ を **図 3** で与える．双極子モーメントについては式 (32) に従うものとし，これらの双極子に対して $M = 60$ として推定を試みた．初期推定値の推定誤差を以下に，反復計算による推定誤差 ε_t および，その誤差評価 $\widetilde{\varepsilon}_t$ を**図 4** に示す．

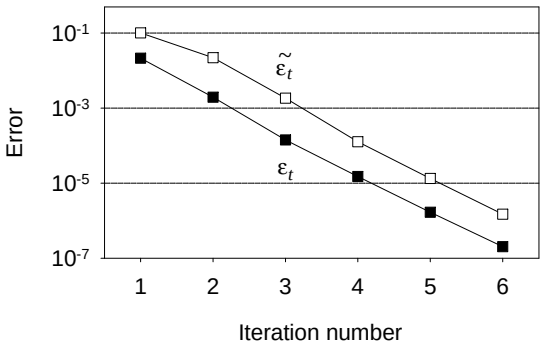

図 2 図 1 の双極子に対する推定誤差 ε_t とその評価 $\widetilde{\varepsilon}_t$
Fig. 2 Convergence history of the error ε_t and its bound $\widetilde{\varepsilon}_t$ for the estimation of dipoles located as Fig. 1.

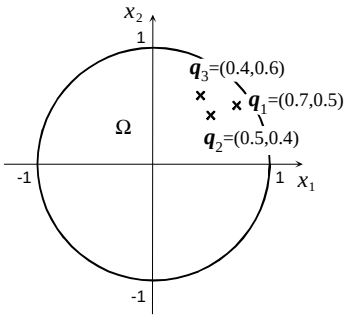

図 3 近接した双極子の例
Fig. 3 Locations of dipoles forclustered case.

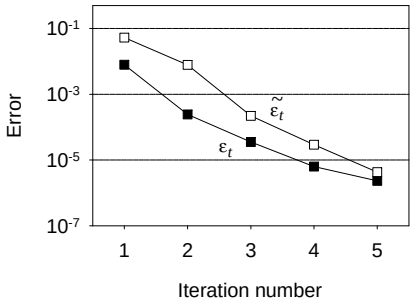

図 4 近接双極子に対する ε_t と $\widetilde{\varepsilon}_t$
Fig. 4 Convergence history of ε_t and $\widetilde{\varepsilon}_t$ for clustered case.

$$\begin{aligned}
E_{q1}^{(0)} &= 1.8 \times 10^{-2}, & E_{m1}^{(0)} &= 2.7 \times 10^{-2},\\
E_{q2}^{(0)} &= 2.4 \times 10^{-2}, & E_{m2}^{(0)} &= 3.3 \times 10^{-2},\\
E_{q3}^{(0)} &= 9.3 \times 10^{-3}, & E_{m3}^{(0)} &= 2.0 \times 10^{-2}.
\end{aligned}$$

ただし，この例では $M = 60$ と観測点の数を多くしたため，定数 a を 15 とすることができた．

最後に，観測データに誤差が含まれる場合についての推定結果を示す．双極子の位置とモーメントがそれぞれ **図 5** および式 (32) に従う $N = 3$ の例を考え，観測データには次式に示す誤差が含まれるものとした．

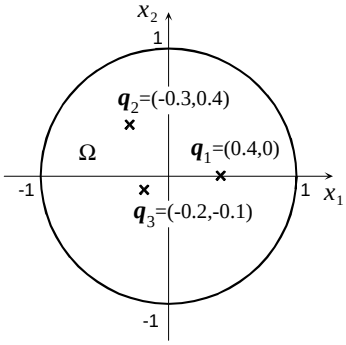

図 5 観測誤差を含む例
Fig. 5 Locations of dipoles with noise.

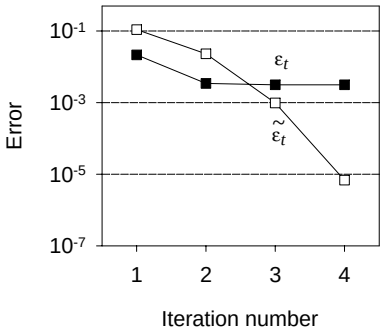

図 6 観測誤差を含む例の ε_t と $\widetilde{\varepsilon}_t$
Fig. 6 Convergence history of ε_t and $\widetilde{\varepsilon}_t$ with noise.

$$\{1+\sigma(\boldsymbol{x})\}\,u(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\Gamma.$$

ただし，$\sigma(\boldsymbol{x})$ は $|\sigma(\boldsymbol{x})|\le 10^{-3}$ を満足するように一様乱数で与えるものとする．この場合の $M=30$ に対する初期推定値の推定誤差は

$$E_{q1}^{(0)}=5.4\times10^{-2}, \qquad E_{m1}^{(0)}=3.0\times10^{-2},$$
$$E_{q2}^{(0)}=6.0\times10^{-2}, \qquad E_{m2}^{(0)}=3.5\times10^{-2},$$
$$E_{q3}^{(0)}=6.9\times10^{-3}, \qquad E_{m3}^{(0)}=3.6\times10^{-2}$$

となった．また，反復計算による推定値 $\boldsymbol{v}^{(t)}$ の真値 $\boldsymbol{v}$ に対する誤差 ε_t およびその誤差評価 $\widetilde{\varepsilon}_t$ を **図 6** に示す．図 6 では誤差評価 $\widetilde{\varepsilon}_t$ の値が真値 $\boldsymbol{v}$ に対する誤差 ε_t よりも大きくなっているが，これは推定誤差の評価 (27) における $|\boldsymbol{S}-\widetilde{\boldsymbol{S}}|$ の値が観測誤差の影響によって無視できないためである．なお，この例では定数 $a=5$ を用いている．

6. おわりに

双極子モデルを対象とする 2 次元 Poisson 方程式のソース逆問題に着目し，順解析の反復を必要としない直接的な数値解法を提案した．ここではソース項として複数個の双極子からなるモデルを考え，各々の双極子の位置および双極子モーメントを推定対象としている．本解法は調和関数を用いた境界積分表示に基づくものであるが，境界積分の数値計算において生じる誤差を無視するならば，3 章の条件 1 に示す分離条件を満足する双極子に対して解の収束性は保証されている．また，直接的解法の推定結果を利用した反復計算について述べ，推定値の精度改良を試みた．

本解法の有効性を確認するために，図 1 に示す位置に存在する未知双極子に対して推定を行った．その結果，観測点の個数 30 に対して十分な精度の推定結果を得ることができた．また，各々の双極子が近接して存在する場合について，観測点数を多くとれば十分な精度の推定結果が得られることを示した．さらに，与えられた観測データに誤差が含まれる場合についても本解法を適用し，その有効性を確認した．

謝辞 本論文の作成にあたり，有益なご助言をいただいた岡山理科大学の大江貴司講師に深く感謝します．なお，本研究の一部は文部省科学研究費補助金基盤研究（C）09895003 の援助によるものである．

参 考 文 献

1) Anger, G.: *Inverse Problems in Differential Equations*, p.255, Plenum, New York (1990).
2) 小林直樹，速水 謙：非線形最適化法による脳内電流双極子推定，日本応用数理学会平成 8 年度年会講演予稿集，pp.224–225 (1996).
3) 大道 学，野田直剛：複数個の分布熱源を有する二次元定常熱伝導逆問題の解析，情報処理学会論文誌，Vol.36, No.11, pp.2566–2571 (1995).
4) Reeve, D.E. and Spivack, M.: Determination of a source term in the linear diffusion equation, *Inverse Problems*, Vol.10, No.6, pp.1335–1344 (1994).
5) 田中 博，岡部正之，鈴木 貴：逆問題（岩波講座応用数学 3），p.106, 岩波書店，東京 (1993).
6) Yamatani, K. and Ohnaka, K.: An estimation method for point sources of multidimensional diffusion equation, *Appl. Math. Modelling*, Vol.21, No.2, pp.77–84 (1997).
7) Yamatani, K. and Ohnaka, K.: A reliable estimation method of a dipole for three-dimensional Poisson equation, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.95, Nos.1&2, pp.139–151 (1998).

(平成 11 年 5 月 31 日受付)
(平成 12 年 2 月 4 日採録)

山谷　　克

昭和 44 年生．平成 9 年大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻博士課程修了．同年静岡大学工学部助手．未知ソースの推定アルゴリズムの研究に従事．博士（工学）．日本数学会，日本応用数理学会会員．

大中幸三郎（正会員）

昭和 22 年生．昭和 51 年大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻博士課程修了．同年大阪大学大型計算機センター助手．現在，同大学大学院工学研究科助教授．逆問題および数値計算の研究に従事．工学博士．日本応用数理学会，日本数学会，計測自動制御学会，ACM，SIAM 各会員．