補間曲線としてのB2-スプライン曲線とS- スプライン曲線の比較*

8K−4

黒田 満[†] 古川 進[‡]
豊田工業大学 山梨大学工学部

1 はじめに

自由形状な曲線を必要とする分野で, 3 次の C^2 補間曲線に局所性を持たせる研究が多くなっている. 多項式スプラインで実現するには, 節点挿入か次数あげによって曲線の自由度をあげることである[1]. 前者の立場から B2-スプラインの考えが示されて[2], $B\lambda$- スプラインへと一般化された[3]. 具体的に, B3-スプラインによる局所性のつよいブレンディング関数が導かれている[4]. 増えた自由度 (内部制御点) を近傍の通過点から決める別法も提案されている[5]. 後者の立場からは, 有理式の導入へとつらなる多くの方法や優れた一般論がある[6]. これらの曲線は前者と異なるクラスの曲線として, 同一には論じられていない.

本研究では, 形状制御法が大変似ている両者の S-スプライン[7] と B2-スプライン曲線の性質を 3 次の C^2 補間曲線の近くに限って論ずる.

2 B2-スプライン曲線

3 次の B2-スプライン曲線 (2) は 3 次の B-スプライン曲線 (1) の 1 つおきの制御点 d_{2i} を対応する曲線の通過点 p_i で置き換えることによって得られる. 比較の便宜上, 節点列を次のようにとる.

$u_{2i} = i,\ u_{2i+1} = i + 1/2, \quad i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$

$$r(u) = \sum_i v(u-u_i)d_i, \tag{1}$$

$$= \sum_i e(u-i)p_i + \sum_i f(u-i)d_{2i+1}. \tag{2}$$

$$d_{2i-1} + 4d_{2i} + d_{2i+1} = 6p_i, \tag{3}$$

$$\begin{cases} e(u) = \frac{3}{2}v(u), \\ f(u) = -\frac{1}{4}v(u) + v(u-1/2) - \frac{1}{4}v(u-1). \end{cases} \tag{4}$$

ブレンディング関数 $e(u), f(u)$ は図 1 のようである. 局所台はそれぞれ 4 と 6 である. 従って, 通過点と (内部) 制御点は共に局所性のある形状制御変数である.

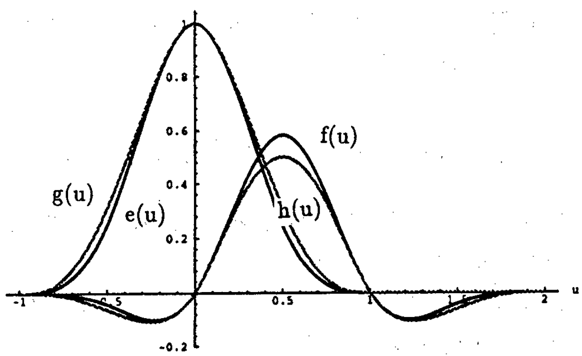

図 1. B2- / S-スプライン曲線のブレンディング関数

3 S-スプライン曲線

4 次の B-スプライン曲線で節点を全て多重度 2 とし, さらに節点 u_i に対応する制御点 d_{2i} を曲線の通過点 p_i で置き換えたものが S-スプライン曲線 (6) である. 節点列は $u_i = i,\ i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ とする. S-スプライン曲線と B-スプライン曲線および Bezier 曲線の制御点間の関係が図 2 に示される.

$$r(u) = \sum_i \underline{g}(u-i)d_{2i} + \sum_i \underline{h}(u-i)d_{2i+1}, \tag{5}$$

$$= \sum_i g(u-i)p_i + \sum_i h(u-i)d_{2i+1}. \tag{6}$$

$$d_{2i-1} + 2d_{2i} + d_{2i+1} = 4p_i, \tag{7}$$

$$\begin{cases} g(u) = 2\underline{g}(u), \\ h(u) = -\frac{1}{2}\underline{g}(u) + \underline{h}(u) - \frac{1}{2}\underline{g}(u-1), \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \underline{g}(t+1) = \frac{1}{4}B_0(t),\ \underline{h}(t) = \frac{1}{2}B_0(t) + \frac{1}{2}B_1(t), \\ \underline{g}(t) = \frac{1}{4}B_0(t) + \frac{1}{2}B_1(t) + B_2(t) + \frac{1}{2}B_3(t) + \frac{1}{4}B_4(t), \\ \underline{h}(t-1) = \frac{1}{2}B_3(t) + \frac{1}{2}B_4(t),\ \underline{g}(t-1) = \frac{1}{4}B_4(t), \end{cases}$$

$$B_i(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{4-i}t^i, \quad 0 \le t \le 1, \tag{9}$$

ブレンディング関数 $g(u),\ h(u)$ は図 1 のようであって, 局所台はそれぞれ 2 と 3 である. 従って, 通過点 p_i と (形状) 制御点 d_{2i+1} は局所性のある変数である. $e(u), g(u)$ は B-スプライン関数と同形であるので, 性質が良い. $f(u), h(u)$ は補間曲線のブレンディング関

*Comparison of B2-spline Curve with S-spline One as Interpolating Curves

†Mitsuru KURODA : Toyota Technological Institute
‡Susumu FURUKAWA : Yamanashi University

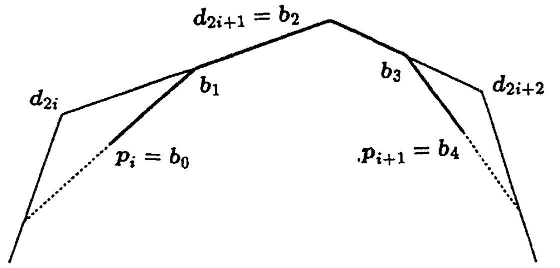

図 2. S- / B-スプライン曲線と Bezier 制御点の関係

数に似ていて，ときに予期せぬうねりを生じさせたりするので要注意である．

4　$B2$-および S-スプライン補間曲線

次式によって制御点を通過点列から決めれば，両曲線は共に純粋なスプライン補間曲線となる．しかも，$m \to \infty$ のとき，両曲線は一致して広く使われる 3 次のスプライン補間曲線となる[8]．

$$d_{2i+1} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{m+1}} \sum_{j=0}^{m} \frac{p_{i-j} + p_{i+j+1}}{2} \alpha^j, \qquad (10)$$

$$\alpha = -2 + \sqrt{3} = -0.2679492.$$

例えば，端点を中心に点対称に仮想の通過点列を考えれば，この式は曲線上のどこでも同じように使える．これは自然終端条件を与えることになる．

5　比較

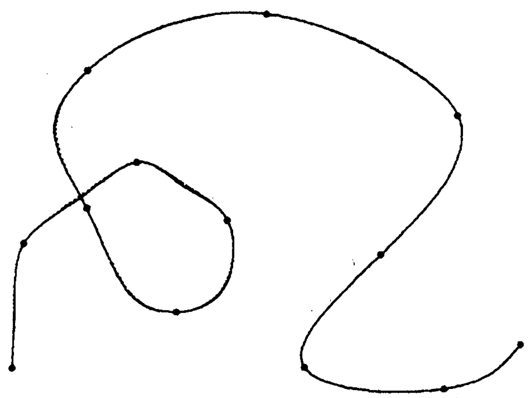

図 3. 左から右へと局所性を減ずる曲線
実線: B2-スプライン曲線; 点線: S-スプライン曲線

図 3 は，左の方から 3 曲線分毎に m を，2, 4, 6, 8 としたときの曲線例である．m が 6, 8 の部分で両曲線に差異はみられない．m が 2, 4 の局所性の強い部分では，B2-スプライン曲線の方が曲線分の中ほどで曲率がより大きくあらわれる．両曲線のブレンディング関数の単純な差をとれば，図 4 のようになって，3. の終りでも述べたように，取り扱い要注意の関数 $f(u)$ が $h(u)$ より強く影響していることがわかる．

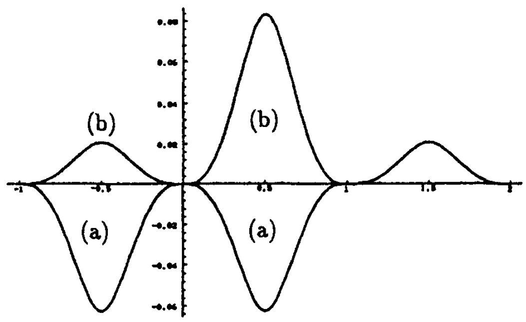

図 4. B2- / S-スプラインのブレンディング関数の差
(a) e(u)-g(u), (b) f(u)-h(u).

6　まとめ

3 次の C^2 補間曲線に節点挿入と字数あげによって局所性をもたせた 2 つの曲線の性質が 3 次の C^2 補間曲線の近傍で明らかにされた．今後，曲率のプロファイル等によるチェックが課題である．

参考文献

1) Boehm, W., G. Farin and J. Kahmann : A Survey of Curve and Surface Methods in CAGD, Computer Aided Geometric Design, 1 (1984) 1.

2) Woodward, C. D. : B2-splines; A Local Representation for Cubic Spline Interpolation, In Proc. CG International '87, T. L. Kunii (Ed.), Springer, New York, (1987) 197.

3) Krokos, M. A. and M. Slater : Interactive Shape Control of Interpolating B-splines, Computer Graphics Forum II, 3 (Eurographics '92)(1992) C-435.

4) Kai-CHING Chu: B3-splines for Interactive Curve and Surface Fitting. Computer & Graphics, 14, 2 (1990) 281.

5) 古川　進, 伊藤　誠, 黒田　満, 清水誠司 : 自由曲線, 曲面の生成時における制御点決定の一手法, 精密工学会誌, 58, 4 (1992) 715.

6) Catmull, E. and R. Rom : A Class of Local Interpolating Splines, Computer Aided Geometric Design, R. Barnhill and R. Riesenfeld (eds.), Academic Press, Orlando, (1974) 317.

7) 河合利幸, 藤田卓志, 大村皓一 : 2 重節点をもつスプライン基底の一構成法, 電子情報通信学会論文誌 D, J71-D, 6 (1988) 1149.

8) 黒田　満, 古川 進, 伊藤 誠 : 局所性をもつ 3 次の C^2 連続なスプライン補間曲線, 1991 年度精密工学会秋季大会講演論文集 (1991) 797.