8K−2

フラクタル・レイトレーシング法

青山　智夫　（日立ＣＥ　大型設計部）

1．はじめに

フラクタルをコンピュータによってシミュレーションするとき，複素漸化式を用いる場合[1]が多い．
しかし漸化式は「絵」を得る手段からみると十分とはいえないように思える．漸化式が物理現象と対応しない点が応用範囲を限定している．本論文では複素力学系の漸化式適用操作と物理現象との対応を考察する．
その結果を使って漸化式操作を拡張する．

2．複素力学系の漸化式と光線追跡法

マンデルブロー集合[2]（M集合）を計算する漸化式，

$$Z_{n+1}=Z_n^2+C \qquad (0)$$

を用いたフラクタル生成プログラムは，
「点Ｃの位置情報が漸化式(0)によって変形され，複素平面上に跡を描いていき，跡が原点からの距離Ｋを超えるとＣ点の色が決定される」という処理である．
漸化式を適用する推進基準は離散時間である．
点Ｃの情報は漸化式と離散時間によって複素平面上を１対１に伝搬してゆき，複素平面のある１点に達する．
これは一種の「光線」のようなものである．

物理光線は始点から分散していく．分散を一般化すると，光線の進行を定義する漸化式の中に，光の始点座標と方位を含む関数が存在することになる．
漸化式(0)は，始点を∞とし適当なバイアスを導入すればこの条件を満足する．この光線はＣ点の近傍：δ という情報を順次拡大する性質を持っている．

フラクタル図形を漸化式 f_i で定義するとき，その適用回数は無限回を仮定している．この操作を，
$f_\infty=\lim(N\to\infty)f_N$，$f_N=\Pi f_i$，と書く．
もし Π を有限回で中断すると，f_N は有限回の複雑度しかなくフラクタルを生成しない．しかしＮがある程度大きければ一見フラクタル的に見える．有限回の f_N は光線の投影面を考えたことに相当する．

複素漸化式の適用によって表わされる光線を考えるとき問題になるのは，漸化式の中に多価関数があるときである．この問題は時間を逆行させたときにも現われる．時間逆行に問題を残しているという点で，複素漸化式は「因果律の成り立たない系」を記述している．
漸化式適用結果が1:nになるような複素関数を使うと，f_∞ の結果は無限個の位置を指すことになる．
それが限られた領域に収斂する保証はない．
n:nとなる複素関数系を考えれば位置数の爆発を防ぐことは出来るが，漸化式の中のＣ項の意味を考察したときに示した，光線の重要な性質の一つを失う．この問題をマンデルブローは分解可能な力学系で異なる可能性の有限集合の中から選ぶことが必要[3]としている．その方法を採ると，選定基準によっては不連続な境界のある図形が生成する．境界線には物理的な意味を見いだしにくい．

こういう問題が生じるのは，f_∞ 操作から来ている．
有限の f_N ではたかだか数えられる数の位置座標しか生成しないので，それらの位置の集合と何らかの量の変換を導入すれば図形表示できる．この意味で，有限時間は複素力学系漸化式による画像生成法の適用範囲を拡大する．

複素漸化式から画像を得るプログラムでは時間は式を適用する推進力であって，画像そのものには影響を与えないようになっている．しかし有限 f_N 操作で画像を生成するときは，時間も画像の形を決定する重要な要素になる．

以上，光線という概念の導入により漸化式による画像生成法が①〜④のように考えられる．

①　漸化式を光線の挙動に対応させた場合，有意な漸化式は次のようである，

$$Z_{n+1}=AZ_n^2+BZ_n+C. \qquad (1)$$

$$Z_{n+1}=AZ_n+B(Z_n+\varepsilon)^{-1}+C. \qquad (2)$$

$$Z_{n+1}=f(Z_n)+C.$$

$$f=\exp,\cos,\cosh,\sin,\ldots\ln,\ldots \qquad (3)$$

$$R_e(Z_{n+1})=R_e(Z_n)^2+I_m(Z_n)^2+C_r,$$

$$I_m(Z_{n+1})=2R_e(Z_n)I_m(Z_n)+C_i. \qquad (4)$$

ここで，$R=|Z_n|$，Ａ，Ｂは実係数，ε は正の小数である．多価関数は主値をとる．
また，$C_r=R_e(C)$，$C_i=I_m(C)$．

光線を複数の漸化式で実現することもできる．式(1〜4)は生成点列の間隔を離す様に作用するので，
それとは違う作用を混ぜると，性質の異なった画像が得られる確率が高くなる．たとえば，

$$Z_{n+1}=Z_n\exp(A-BR^2)+U,\ R=|Z-U| \qquad (5)$$

$$Z_{n+1}=Z_n\{1-\exp(A-BR^2)\}+U. \qquad (6)$$

Fractal−Ray−tracing Method

Tomoo Aoyama
Hitachi Computer−Engineering Co., Ltd.

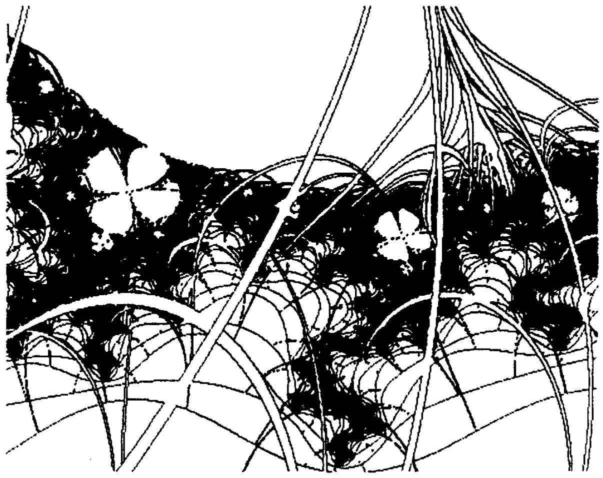
$Z_{n+1}=\mathrm{mod}\{Z_n, R+A\}$．　(7)
である．Ｕは複素係数である．
② 次に原点からの半径$K^{1/2}$の円以外の「物体」を置くことが考えられる．物体の一例を挙げる．複素平面内の任意の指定点U_jとZ_jの距離量を計算し，その値が予め定めた値θ以下ならば集合Θ_jに属する点とし，漸化式の適用を中断する．
Θ_j集合の形は影に相当する．値がθ以上のとき，漸化式の適用が継続される．それゆえ光線がその後Θ_j集合に至ることもある．本論文の「光線」では物体の影は複数でフラクタル的な影像を生じる可能性がある．複数の影が生じるのは時間を反転したとき，逆写像が多価関数のためである．

非線形力学系の軌道はアトラクターに達することがある．それらは図形を生じる．有限時間で必ず図形が描けるような処置では，トレーシングのシンクとしてアトラクター的なものを処理の中に入れて置かなければならない．それが物体の導入理由である．

点の色づけの一例として，Ｍ集合を0，Θ_j集合をj，両方の集合に属さない点（$|Z_n|>K$となる点）をmod(n,D)+j+1 とする．ただしDをディスプレイの表示階調−（j+1）とする．
距離量は，$V=Z-U$　とするとき，
$||AV_r^2+BV_i^2|-\eta|$．　(8)
$||V_r^4-V_rV_i^2+V_i^4|-\eta|$．　(9)
などを用いることが出来る．ηは物体に穴を開けるための実数パラメータである．また，$V_r=R_e(V)$ $V_i=I_m(V)$　である．指定点ＵはＭ集合が存在するならば，複数採ってかつ指定点毎に距離量の定義を変えることが出来る．
③ 物体によって光線はスペクトル強度の変化などの物理変化を受ける．それに相当する処理を考察する．光線になんらかの量を付随させると，その効果を導入できる．その一例，

任意の点Ｃにカウンタを設定する．複素平面内の任意の指定点U_jとZ_jの距離量を計算し，その値が予め定めた値θ以下のとき，カウントアップする．複素平面上の全ての点で漸化式の適用が完了した後，カウンタ値ｋをmod（ｋ，D）で表示する．Dはディスプレイの表示階調である．この場合光線の属性をカウンタ値というデジタル・スカラ量に簡約化しているが，複数の属性をもつ量に拡大可能である．
④ 物体に光線があたると表面で反射，屈折を起す．この変化は光線が物体領域に達したとき，漸化式の適用後に演算子Ｆを１回作用させることである．
すなわち，$Z_{n+1}=F(Z_n)$．　(10)
実際の演算子としては，conj，−，＋ρ　(11〜13)が使える．ρは複素定数である．これらの演算子は反射屈折現象の性質の一部をもっている．

以上の方法を組合せた画像の一例を示す．



３．まとめ

フラクタル的な光線という概念の導入により，複素力学系の漸化式適用による画像生成法を修飾できる．
この修飾は多くの画像変形のためのパラメータを含み，この値を操作することによって様々な画像を生成できる．

文献

1)宇敷重広著，「フラクタルの世界」，日本評論社
2)マンデルブロー著，広中監訳，「フラクタル幾何学」日経サイエンス社(1985)，　pp.C1〜C16.
3)同，pp.196.