5D−7 ファジィ部分可到達行列の修正アルゴリズム*

三田村 保 大内 東†

北海道大学工学部‡

1 はじめに

対象の構造が複雑であるシステムをコンピュータ援用のもとで解析する構造モデリングがある．ファジィ構造モデリング「FISM/FUZZY」は対象とするシステムを構成要素集合上のファジィ擬順序関係として捉え，ファジィ可到達行列としてモデル化し，分類，整理するものである [1]．ファジィ推移的具象化はモデル生成者の対象システムに対するあいまいな認識を関係の推移的性質を利用して具象化する過程である．本稿ではFISM/FUZZYの具象化過程に必要な試行錯誤の機能を実現するためにファジィ部分可到達行列の修正理論を提案する．

2 諸定義

本稿で使用する諸定義を述べる．

• $N=\{1,2,\cdots,n\}$: システム要素に対する添字集合，$J=N\times N$とする．

• $R=\{(i,j)|i,j\in N\}\supseteq J$: N上の反射的かつ推移的ファジィ二項関係 (ファジィ擬順序関係)．

• ファジィ行列: ファジィ擬順序関係 R への帰属度を表す数値を要素とする行列である．行列 Mの (i,j) 要素を m_{ij} と書く．ただし，$0\le m_{ij}\le 1$ である．すなわち

$$M(i,j)=[m_{ij}]. \tag{1}$$

• ファジィ行列 A，Bに対して次の演算を定義する．

$$\begin{aligned}(A+B)_{ij} &= \max(a_{ij},b_{ij}), &(2)\\ (AB)_{ij} &= \max_k[\min(a_{ik},b_{kj})], &(3)\\ (A@B)_{ij} &= \max_k(a_{ik}\alpha b_{kj}), &(4)\end{aligned}$$

$$\text{ただし，}a\alpha b = \begin{cases}1 & : & a\le b\\ b & : & a>b.\end{cases}$$

定義 2.1 ファジィ可到達行列とは以下の条件を満たす正方ファジィ行列 Mである．

$$\begin{aligned}M+I &= M, &(5)\\ M^2 &= M. &(6)\end{aligned}$$

定義 2.2 部分的既知なファジィ行列

部分的既知なファジィ行列とは，その行列の要素が最大値と最小値をもつ行列である．行列 Mの (i,j) 要素の最大値を$\overline{m}_{ij}$，最小値を$\underline{m}_{ij}$と書く．ただし，$0\le\underline{m}_{ij}\le\overline{m}_{ij}\le 1$ である．すなわち

$$M(i,j)=[\underline{m}_{ij},\overline{m}_{ij}]. \tag{7}$$

部分的既知なファジィ行列に対して要素を未知要素と既知要素に分ける．ただし未知要素と既知要素を以下で定義する．

$$M(i,j)=\begin{cases}\text{未知要素} & :\underline{m}_{ij}<\overline{m}_{ij}\text{のとき}\\ \text{既知要素} & :\underline{m}_{ij}=\overline{m}_{ij}\text{のとき.}\end{cases} \tag{8}$$

部分的既知なファジィ行列を用いると，ファジィ擬順序関係 Rの帰属度を柔軟に表現することが可能である．(i,j) 要素が既知要素であるとき，その要素の値は，従来のファジィ行列と同様にファジィ擬順序関係 iRjの帰属度を示す．一方 (i,j) 要素が未知要素であるときは，iRjの帰属度が $[\underline{m}_{ij},\overline{m}_{ij}]$ で一意に決定することができない状態を示す．

定義 2.3 ファジィ部分可到達行列

ファジィ部分可到達行列とは，部分的既知なファジィ行列でかつ以下のファジィ反射性とファジィ部分可到達性を満たす行列 Mである．

ファジィ反射性 : 行列 M がファジィ反射性を満たすとき，対角要素は既知要素でかつ値が1である．

ファジィ部分可到達性 : 行列 M がファジィ部分可到達性を満たすとき，(i,j) 要素について

$$\begin{aligned}\underline{m}_{ij} &< \min(\underline{m}_{ik},\underline{m}_{kj}), &(9)\\ \overline{m}_{ik} &< \min(\overline{m}_{ij},\underline{m}_{jk}), &(10)\\ \overline{m}_{kj} &< \min(\underline{m}_{ki},\overline{m}_{ij}), &(11)\end{aligned}$$

のいずれかの条件を満たす要素の三組 (i,j,k) が存在しないことをいう．

3 ファジィ部分可到達行列の含意規則

ファジィ部分可到達行列の含意規則を定義する．

定義 3.1 添字対集合 W

未知要素である (i,j) 要素の値に依存して決定される要素を表す添字の二項対集合で，以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}W_1(i,j) &= \{(l,m)|\underline{m}_{lm}<\min(\underline{m}_{ij},\underline{m}_{li},\underline{m}_{jm})\} &(12)\\ W_2(i,j) &= \{(l,m)|\overline{m}_{im}<\min(\overline{m}_{lm},\underline{m}_{ij},\underline{m}_{jl})\} &(13)\\ W_3(i,j) &= \{(l,m)|\overline{m}_{lj}<\min(\overline{m}_{lm},\underline{m}_{ij},\underline{m}_{mi})\} &(14)\\ W_4(i,j) &= \{(l,m)|\overline{m}_{ij}<\min(\overline{m}_{lm},\underline{m}_{il},\underline{m}_{mj})\} &(15)\end{aligned}$$

---

*An Algorithm for Modifing Fuzzy Partially filled Reachability Matrix

†Tamotsu Mitamura and Azuma Ohuchi

‡Hokkaido University

以上の諸集合は簡単のため W_1, W_2, W_3, W_4 と記す.

上述の添字対集合 W は後で示すように含意規則によって値が変更対象となる未知要素を示すものである. 含意規則とは, ファジィ部分可到達行列の未知要素に値を与えたときに新たな行列が再びファジィ部分可到達性を満たすために他の未知要素の値を決定する規則である.

定義 3.2 含意規則

未知要素 $M(i,j)$ の値 $[\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}]$ を $[\underline{m'}_{ij}, \overline{m'}_{ij}]$ としたとき, 以下の 4 通りの規則を適用すれば, (l,m) 要素の値 $[\underline{m}_{lm}, \overline{m}_{lm}]$ は新たな値 $[\underline{m'}_{lm}, \overline{m'}_{lm}]$ となる. ただし, $0 \le \underline{m}_{ij} \le \underline{m'}_{ij} \le \overline{m'}_{ij} \le \overline{m}_{ij} \le 1$ とする.

$$
\begin{array}{lll}
\text{規則}1: if & \underline{m}_{ij} < \underline{m'}_{ij} \ then & \\
 & \underline{m'}_{lm} = \min(\underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{li}, \underline{m}_{jm}) & \forall (l,m) \in W_1 \\
\text{規則}2: if & \underline{m}_{ij} < \underline{m'}_{ij} \ then & \\
 & \overline{m'}_{lm} = \overline{m}_{im} & \forall (l,m) \in W_2 \\
\text{規則}3: if & \underline{m}_{ij} < \underline{m'}_{ij} \ then & \\
 & \overline{m'}_{lm} = \overline{m}_{lj} & \forall (l,m) \in W_3 \\
\text{規則}4: if & \overline{m'}_{ij} < \overline{m}_{ij} \ then & \\
 & \overline{m'}_{lm} = \overline{m'}_{ij} & \forall (l,m) \in W_4
\end{array}
$$

4 修正理論

ファジィ可到達行列の未知要素の値の修正理論について述べる. (i,j) 要素の値を修正するときに, 考慮しなければならない点は, 下限値を下げる場合または上限値を上げる場合である. それ以外は含意理論で行われる. 要素の修正については以下について考慮すべきである.

(1) 修正する要素は修正後にもとの値に戻らないこと.

(2) 修正された他の要素が明示できること.

(2) 修正後の行列がファジィ部分可到達行列であること.

上記の条件を満たす戦略として, (i,j) 要素を修正する場合について考える. 要素集合 N を部分集合 K_1, K_2 に分割する.

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \{i,j\} && (16) \\
K_2 &= N - K_1 && (17)
\end{aligned}
$$

次に行列 M を部分行列 A, B, X, Y に分割する.

$$
M = \begin{array}{c|cc|}
 & K_1 & K_2 \\ \hline
K_1 & A & X \\
K_2 & Y & B \\ \hline
\end{array} \qquad (18)
$$

行列 A, X, Y を修正することによって, 修正箇所を明示し, かつ行列の有する情報の減少をできる限り少なくすることが可能となる.

定義 4.1 拡大規則

未知要素 $M(i,j)$ の値 $[\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}]$ を $[\underline{m'}_{ij}, \overline{m'}_{ij}]$ としたとき, 以下の規則を適用することによって, 更新後の行列は再びファジィ部分可到達行列となる. ただし, $0 \le \underline{m'}_{ij} \le \underline{m}_{ij} \le \overline{m}_{ij} \le \overline{m'}_{ij} \le 1$ とする.

$M(i,j)$ の値を $[\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}]$ から $[\underline{m'}_{ij}, \overline{m'}_{ij}]$ とする.

$$
\begin{array}{l}
\text{begin} \\
\quad \text{if} \quad \underline{m'}_{ij} < \underline{m}_{ij} \text{ then begin} \\
\qquad \underline{m}_{il} = \min(\underline{m}_{il}, \underline{m'}_{ij}) \quad \forall l \ne i,j \\
\qquad \underline{m}_{jl} = \min(\underline{m}_{jl}, \underline{m'}_{ij}) \quad \forall l \ne i,j \\
\qquad \underline{m}_{li} = \min(\underline{m}_{li}, \underline{m'}_{ij}) \quad \forall l \ne i,j \\
\qquad \underline{m}_{lj} = \min(\underline{m}_{lj}, \underline{m'}_{ij}) \quad \forall l \ne i,j \\
\quad \text{end;} \\
\quad \text{if} \quad \overline{m}_{ij} < \overline{m'}_{ij} \text{ then begin} \\
\qquad \underline{m}_{il} = \min(\underline{m}_{il}, \overline{m}_{ij}) \quad \forall l \ne i,j \\
\qquad \underline{m}_{jl} = \min(\underline{m}_{jl}, \overline{m}_{ij}) \quad \forall l \ne i,j \\
\qquad \underline{m}_{li} = \min(\underline{m}_{li}, \overline{m}_{ij}) \quad \forall l \ne i,j \\
\qquad \underline{m}_{lj} = \min(\underline{m}_{lj}, \overline{m}_{ij}) \quad \forall l \ne i,j \\
\quad \text{end;} \\
\text{end.}
\end{array}
$$

定理 4.1 拡大規則を用いて更新された新たな行列 M は再びファジィ部分可到達行列となる.

以下にファジィ部分可到達行列の修正アルゴリズムを示す.

[修正アルゴリズム]

$M(i,j)$ の値を $[\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}]$ から $[\underline{m'}_{ij}, \overline{m'}_{ij}]$ とする.

$$
\begin{array}{ll}
\text{begin} & \\
\quad \text{if} \quad \underline{m'}_{ij} < \underline{m}_{ij} \ \text{ or } \overline{m}_{ij} < \overline{m'}_{ij} \text{ then begin} & \\
\qquad \text{拡大規則を用いて M をファジィ部分可到} & \\
\qquad \text{達行列にする.} & \\
\quad \text{end;} & \\
\quad \underline{m'}_{lm} = \min(\underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{li}, \underline{m}_{jm}) & \forall (l,m) \in W_1 : \text{規則}1 \\
\quad \overline{m'}_{lm} = \overline{m}_{im} & \forall (l,m) \in W_2 : \text{規則}2 \\
\quad \overline{m'}_{lm} = \overline{m}_{lj} & \forall (l,m) \in W_3 : \text{規則}3 \\
\quad \overline{m'}_{lm} = \overline{m'}_{ij} & \forall (l,m) \in W_4 : \text{規則}4 \\
\text{end.} &
\end{array}
$$

5 むすび

本稿では FISM/FUZZY のファジィ推移的具象化の理論を柔軟に行う方法として, ファジィ部分可到達行列の修正理論を提案した. この修正理論を用いることによって, 要素間の値を制約なしに自由に修正することができる. モデリングに必要な試行錯誤の機能を有することが可能となる.

参考文献

[1] 三田村, 大内 : ファジィ部分可到達行列の更新アルゴリズム, 第 45 回情報処理学会全国大会論文集,(1992)