3Q−6

誤差の運動方程式と微分方程式の数値解法

内海正樹[1]， 高木隆司[2]， 川合敏雄[3]
[1]東芝府中工場， [2]東京農工大学， [3]慶應大学

1．はじめに

微分方程式を差分方程式になおして数値的に解く場合，数値解の品質を保証することが重要である。そこで，微分方程式

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u). \quad (1\cdot1)$$

について，数値計算の刻み幅hを最適制御理論をもとに制御する方法の理論を紹介する．

2．誤差の発展方程式

(1·1)式で与えられた微分方程式を数値的に解く場合，刻み幅hの時間内にehの大きさの誤差が発生したとする．eは単位時間当たりの誤差発生率を表す．つまり，数値解を真の解uと誤差δuの重ね合わせと考えて，

$$\frac{d(u+\delta u)}{dt} = f(u+\delta u, t) + e(u+\delta u, t; h) \quad (2\cdot1)$$

という関係が成り立つものとする．なお，eは一般にhにも依存する。

ここで， eを微小な量と考え， e（u＋δu）をe（u）で置き換える．(2·1)式の右辺をテイラー展開して整理すると

$$\frac{d\delta u}{dt} = \delta u\frac{\partial f}{\partial u} + e(u, t; h) \quad (2\cdot2)$$

を得る．この式より，方程式(2·1)を解いた場合に発生する誤差δuの挙動を調べることができる．今後，(2·2)式を誤差の発展方程式と呼ぶことにする．なお，初期状態t＝0では誤差は発生していないので，誤差の初期条件は

$$\delta u(0) = 0 \quad (2\cdot3)$$

である．

3．刻み幅の最適制御理論

ルンゲ・クッタ法によって時刻Tまで計算した場合，ルンゲ・クッタ法の処理ステップ数（これを計算コストと考える）をNとする。Nを一定とする条件のもとで，時刻Tにおける誤差δu（T）を最小にするような刻み幅hを最適制御理論[1]にもとづいて求める．

最適化のための評価関数Jは，Lagrangeの未定係数λを用いて

$$J = \delta u(T) - \lambda N \quad (3\cdot1)$$

と表される．

ルンゲ・クッタ法の誤差発生率は刻み幅hの4乗に比例するから，誤差δuをx_1，ステップ数Nをx_2と書くとシステム方程式は

Error Equations of motion and Numerical Solution of Differential Equations

Masaki Utumi[1], Ryuji Takaki[2], Toshio Kawai[3]
[1]Toshiba Fuchu WORK
[2]Tokyo University of Agriculture and Technology
[3]Keio University

$$J = x_1(T) - \lambda x_2(T), \qquad (3\cdot2)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = A(t)x_1 + E(t)h^4, \qquad (3\cdot3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = h(t)^{-1} \qquad (3\cdot4)$$

となる．ここで，E（t）は解くべき微分方程式に依存する関数であり，(1·1)式が与えられれば計算することができる．[2] A（t）は，誤差δuが将来の誤差の挙動にどの程度影響するかを表すものである．随伴ベクトルϕ_1，ϕ_2を用いてハミルトニアンは

$$H = \phi_1(Ax_1 + Eh^4) + \phi_2 h^{-1} \qquad (3\cdot5)$$

と定義される．なお ϕ_1，ϕ_2は

$$\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -A\phi_1, \qquad (3\cdot6)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \qquad (3\cdot7)$$

を満足し，終端条件は

$$\phi_1(T) = \frac{\partial J(T)}{\partial x_1} = 1, \qquad (3\cdot8)$$

$$\phi_2(T) = \frac{\partial J(T)}{\partial x_2} = -\lambda \qquad (3\cdot9)$$

である．(3·7)，(3·9)式より，全ての時間tで

$$\phi_2(t) = -\lambda \qquad (3\cdot10)$$

となることが分かる．

(3·1)式の右辺のδuとNはϕ_1とhを使って，

$$J = \delta u(T) - \lambda N = \int_0^T (\phi_1 E h^4 - \lambda h^{-1})\, dt$$

となる．よって，最適なhを用いると

$$\phi_1 E 4 h^3 + \lambda h^{-2} = 0,$$

$$\therefore h^5 \propto \left(\frac{-\lambda}{\phi_1 E} \right) \qquad (3\cdot11)$$

となる．ところで，終端条件(3·8)の代わりに初期条件

$$\phi_1(0) = 1 \qquad (3\cdot12)$$

を採用しても，この最適問題を解く上で支障にならない．以上から，最適なhは

$$h^5 = C\left(\frac{1}{\phi_1 E} \right) \qquad (3\cdot13)$$

である．ただし，Cは比例定数である．

4．まとめ

最適制御理論にもとづいて，微分方程式の数値解法における刻み幅の最適化を試みた。この方法はより一般化が可能であり，それについては現在研究中である。

参考文献

［1］D.G.ﾙｰｴﾝﾊﾞｰｶﾞｰ：動的システム入門，pp.425-442，ﾎﾙﾄ･ｻｳﾝﾀﾞｰｽ･ｼﾞｬﾊﾟﾝ，東京(1985)

［2］小島辰一：”常微分方程式の数値解法について”，群馬大学教育学部紀要　自然科学編，VOL.39，pp.57-77(1990)