6E−3

多種フロー問題のニューラルネットワークによる解法

松尾　卓治，　黒川　恭一

防衛大学校　情報工学教室

1．はじめに

ネットワークにおける基礎的問題の1つに多種フロー問題がある．多種フロー問題は線形計画問題として定式化できるため、その特徴を生かした解法が種々研究されている[1]．しかしながら現実問題としては、大規模な線形計画問題になることが多く、代わって効率の良い解法としてグラフ理論によるアルゴリズムも種々提案されている．しかしこのアプローチでは適応できる問題が制限される．

本稿では、バイナリニューロンを用いた相互結合型ニューラルネットワークにより、有向ネットワーク上で与えられた要求量をもつ多品種フローが存在するかどうかを高速に判定し、もし存在するなら具体的に各流量を求める手法を提案する．提案するニューラルネットは、有向ネットワークの接続形態、規模によらず動作し、実現可能性の判定を行うことができる．これにより多種フローの実現可能領域を求めることが可能となり、最大フロー問題の効率的な解法となり得る．

2．多種フロー問題の定義

K種フロー問題を表すために、本稿では以下の記号を用いる．

G＝（V，A）：N個の要素より成る頂点集合VとM本の弧より成る弧集合Aをもつ有向グラフ

V＝$\{v_i \mid i=1,2,\cdots,N\}$：頂点集合

A＝$\{a_{ij} \mid i,j=1,2,\cdots,N\}$：弧集合

P＝$\{(s^k,t^k) \mid k=1,2,\cdots,K\}$：各品種は一対のソース$s^k$とシンク$t^k$を持つ．

C_{ij}：弧a_{ij}の容量すなわち弧a_{ij}に流し得るフローの総量の最大許容値

x_{ij}^k：弧a_{ij}を流れる第k種フローの量

$f(s^k,t^k)$：$s^k \to t^k$に流れる第k種フローの量

多種フロー問題には、以下の条件(1)(2)(3)のもと$\sum_{k=1}^{K} f(s^k,t^k)$ を最大にするという最大フロー問題と、非負の整数$r(s^k,t^k)$ $(k=1,2,\cdots,K)$ が与えられた時、$f(s^k,t^k) \geq r(s^k,t^k)$となる、フロー$f(s^k,t^k)$が存在するかどうかを判定する実現可能性問題とがある．本研究においては、このうち後者の実現可能性問題を研究対象とする．

条件（1）　フローの連続条件

$$\sum_i x_{ij}^k - \sum_s x_{js}^k = \begin{cases} -f(s^k,t^k) & j=s^k \\ 0 & j \neq s^k,t^k \\ f(s^k,t^k) & j=t^k \end{cases}$$

条件（2）　容量制限

$$\sum_{k=1}^{K} |x_{ij}^k| \leq C_{ij} \quad \text{for all } i,j$$

条件（3）　フローの非負性

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{for all } i,j$$

3．ニューラルネットワークによる実現可能性問題の解法

3．1　多種フローのニューラル表現

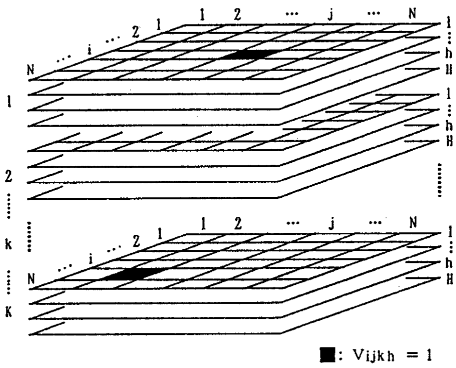


図1　K種フローのニューラルネットワーク表現

本稿で提案するニューラルネットワークは、K種フロー問題を解くために、図1で示したようなN×N×（K×H）個の3次元状のバイナリニューロンアレイを用いる．ここでアレイ上のi行，j列は有向グラフ上の各頂点v_i及び，v_jに対応する．一方、高さ方向には、K種のフローそれぞれに対してH枚のアレイを割り当てる．ただし、ここでHには各要求フロー$f(s^k,t^k)$の最大値を設定するものとする．k番目の品種に対応するH枚のアレイ中では、それぞれ要求されているフロー$(s^k,t^k) \in P$に対応して、シンクt^kからソースs^kへの弧に対応するニューロンH個中、任意の$f(s^k,t^k)$個が他のニューロンとは独立に発火しているものとし、残りのニューロンはその情報をもとに動作していく．またバイナリニューロンの入力U_{ijkh}と出力V_{ijkh}の関係は以下で定義される．

$$V_{ijkh} = \begin{cases} 1 & U_{ijkh} \geq 0 \\ 0 & U_{ijkh} \leqq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$V_{ijkh}=1$であるということは、有向グラフ上の頂点iから頂点jへの弧a_{ij}にk種目のフローが1単位流れることを意味する．

3．2　動作表現

本研究で提案するニューラルネットワークにおけるijkh番目のニューロンは、以下の動作式に従う．（ただしシンクt^kから、ソースs^kへのフローを表すニューロンは除く）

$$\frac{dU_{ijkh}}{dt} =$$
$$-A1\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{r=1}^{H} g(c[i][j])V_{inkr} - \sum_{n=1}^{N}\sum_{r=1}^{H} g(c[i][j])V_{nikr}\right\}$$
$$-A2\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{r=1}^{H} g(c[i][j])V_{njkr} - \sum_{n=1}^{N}\sum_{r=1}^{H} g(c[i][j])V_{jnkr}\right\}$$
$$-A3\,f\left(\sum_{p=1}^{K}\sum_{r=1}^{H} g(c[i][j])V_{ijpr},\ c[i][j]\right) \quad (2)$$
$$-A4\,f\left(\sum_{r=1}^{H} g(c[j][i])V_{jikr},\ \sum_{r=1}^{H} g(c[i][j])V_{ijkr}\right)$$

ただし、（2）式中の関数f（x，y）及び、g（x）は以下のように定義する．

A Neural Network Approach for Multicommodity Flow Ploblem
Takuji MATSUO, and Takakazu KUROKAWA
Dept. of Computer Science, The National Defense Academy

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x>y\\ 0 & x\leqq y\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\leqq 0\end{cases}$$

また、c[i][j]は弧a_{ij}の容量を表すものとし、係数A1、A2、A3、A4は正の整数とする．（２）式において１項目、２項目はそれぞれ頂点ｉ，ｊに関するフローの連続条件に抵触するとき有効となる抑制項である．１項目はｋ番目の品種に関して、ｉ行で発火しているニューロン数がｉ列で発火している数より多い時抑制し、反対に少ない時興奮する．一方２項目は同じくｋ番目の品種に関して、ｊ列で発火しているニューロン数がｊ行で発火している数より多い時抑制し、反対に少ない時興奮する．３項目は、頂点ｉ，ｊを結ぶ弧に着目して、現在その弧に割り当てられているすべての品種の合計がその弧の容量制限に抵触するとき有効となる抑制性の項である．４項目はｋ番目の品種に関して、ノードｊからノードｉへの流れとノードｉからノードｊへの流れが同時に存在し、後者の方が流量が少ない時にその流れを抑制する項である．

４．ニューラルネットによる並列アルゴリズム

（２）式の動作式に従い多種フローの実現可能性を判定する並列アルゴリズムを以下に示す．

Ｓｔｅｐ０　ｔを０にリセット．

Ｓｔｅｐ１　ｋ番目のシンクt^kからソースs^kに要求量$f(s^k, t^k)$を設定する．

Ｓｔｅｐ２　各ニューロンの入力値$U_{ijkh}(t)$を任意の負値に初期化する．

Ｓｔｅｐ３　各ニューロンの出力$V_{ijkh}(t)$を（１）式に従い決定する．

Ｓｔｅｐ４　$\Delta U_{ijkh}(t)$を（２）式に従い算出する．

Ｓｔｅｐ５　$U_{ijkh}(t+1)=U_{ijkh}(t)+\Delta U_{ijkh}(t)$を計算する．

Ｓｔｅｐ６　停止条件（後述）を満たせば終了、それ以外は$t+1$としＳｔｅｐ３へ．

ただし停止条件としては、以下の条件１、２のどちらかを満足したときとする．

条件１　すべてのV_{ijkh}が変化しなくなった時（フローは実現可能）．

条件２　$t=T$（Ｔは事前設定）になった時（フローは実現不可能）．

５．　シミュレーション結果

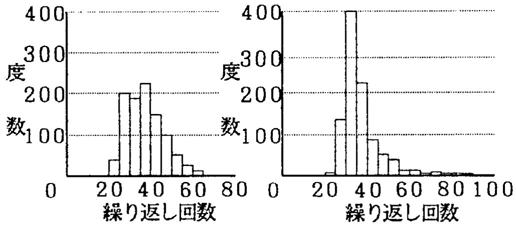
（２）式に従うニューラルネットワークの動作を調べるために、いくつかの例題について計算機シミュレーションを行った．

表１　シミュレーション結果

例題	頂点数N	弧数A	品種数K	係数値 A1	A2	A3	A4	繰り返し回数 最大	最小	平均
1-1	7	24	2	50	49	200	20	58	26	37.3
1-2	7	24	4	50	49	200	20	68	33	39.0
2-1	12	34	2	50	49	200	20	88	31	43.9
2-2	12	34	4	50	49	200	20	74	31	42.6
3-1	20	62	2	50	49	200	20	86	15	22.6
3-2	20	62	4	50	49	200	20	75	15	22.7
4-1	30	98	2	50	49	200	20	55	21	26.0
4-2	30	98	4	50	49	200	20	58	21	28.2
5-1	40	132	2	50	49	200	20	43	23	33.3
5-2	40	132	4	50	49	200	20	76	30	38.8
6-1	50	170	2	50	49	200	20	78	26	37.3
6-2	50	170	4	50	49	200	20	69	34	44.1
7-1	60	208	2	50	49	200	20	80	33	46.1
7-2	60	208	4	50	49	200	20	83	35	47.2
8-1	80	284	2	50	49	200	20	89	45	57.4
8-2	80	284	4	50	49	200	20	98	42	56.6
9-1	100	360	2	50	49	200	20	84	56	67.5
9-2	100	360	4	50	49	200	20	94	54	68.2

表１にそのシミュレーションのまとめとして、各ネットワークにおける頂点数、弧数、品種数、動作式（２）における各係数値、及びニューラルネットワークが実現可能判定に至るまでの繰り返し回数を示す．調査したネットワークは、頂点数7から１００までの有向グラフであり、その各弧に容量が割り当てられている．そのうち任意の頂点対をソース、シンクとした．なお繰り返し回数については異なる初期状態から開始された100回の試行より得られた、最小値、最大値、平均値を示す．ただしこれらの値はすべて、実現可能な要求量についての結果である．

表１に示すように、ほぼ繰り返し回数として１００回以内で実現可能性の判定が可能なことが確認された．したがって例題に挙げた最大頂点数１００程度までのネットワークの実現可能性を判定する場合、パラメータＴに関しては１００程度で良いことがシミュレーション結果よりわかった。図２の(a)および(b)に例題１－１と４－１の繰り返し回数1000回の分布例を示す。



(a) 例題１－１　　(b) 例題５－１

図２　繰り返し回数分布

さらに本稿で提案したアルゴリズムを用いることにより、Ｋ種フローの実現可能領域の探索が可能となる．即ち、逐次$r(s^k, t^k)$を設定し、それに対するＫ種フローの判定を繰り返すことにより、実現可能領域を求められる．なおこのようにして求められた可能領域の境界上は、各フローがとり得る最大値を表しており、これが最大フロー問題の解となっている。

多種フローの実現可能領域はシンプレックス法でも求めることが可能であるが[2]、問題規模が大きくなるにつれて未知変数が増大し、それにともなって計算時間も増大する．例えば例題のネットワーク１－２と３－２に適用した比較では、シンプレックスタブローがそれぞれ(52×150)、(142×392)の行列となり、ワークステーション上での計算時間では問題の規模の増加により約６０倍となり、大規模なネットワークには効率的ではないといえる．これに対し提案したアルゴリズムでは、実現可能性の判定に至るまでのニューラルネットの収束のステップ数は暫増する程度であるので、高速な探索が可能である．また計算機シミュレーションに必要な変数の数は例題９－２では、シンプレックス法が(760×2202)であるのに対し、ニューラルネットワークでは(100×100×4×5)であり約１／８で済む点からも優れている．

６．結論

本稿ではバイナリニューロンより成るニューラルネットワークを用いて、有向ネットワーク上の多種フローの実現可能性を高速に判定する手法を提案した．シミュレーション結果よりネットワークの接続形態によらず実現可能性を判定でき、本アルゴリズムの有効性が確認できた．提案したアルゴリズムの高速化にはニューラルネットワークのハードウェア化が不可欠であり、このハードウェア化により、非常に高速な処理が実現可能であると思われる．

文献

(1)Assad,A.A.:"Multicommodity network flows-a survay",Networks,8,pp.37-91(1978).

(2)小野勝章：”計算を中心とした線形計画法”，日科技連(1976).