トランザクション処理における楽観的並列制御の解析

5G−3

王志遠　松尾文碩
九州大学 工学部

1. まえがき

トランザクション処理における楽観的並列制御法は，共用オブジェクトへのアクセスが，他のトランザクションと競合していないことを楽観的に期待してトランザクションの実行を開始し，実行終了時にデータの一貫性(consistency)が保たれているかを調べる．もし，一貫性が保たれていれば，実行結果をデータベースへ書き込み，そうでない場合は，トランザクションの実行を不成功終了とし，再び実行するという方法である．本稿では，マルコフ過程モデルによって，通常の楽観的並列制御方式を解析できることを示す．そして，新たな楽観的並列制御法を提案する．その方法は，トランザクションの読込みオブジェクト集合が読込みの前にわかっている場合，トランザクションの実行の前に，トランザクションの読込みオブジェクト集合が実行中のトランザクションによって書き換えられるかどうかを調べ，更新される可能性がない場合にのみ実行に移す方法である．この方式をマルコフ過程モデルによって解析し，効率がどの程度改善されるかを示す．

2. マルコフ過程モデルによる楽観的並列制御方式の解析

ここでは，通常の楽観的並列制御方式の不成功終了の確率がマルコフ過程モデルによって計算できることを示す．図1において，状態 $s_k(k=0,1,\cdots,n)$ は，システムに実行中のトランザクションが k 個存在する状態を表している．n は，システムで実行可能なトランザクションの最大数である．図1において，時間 dt 内にトランザクション到着する確率を λdt とする．また，一つのトランザクションが dt 時間内に終了する確率を μdt とする．ここで，システムが状態 s_k にあるとき，k 個のトランザクションは独立であるとし，システムの能力は負荷に依存しない(すなわち，μ が変化しない)として，s_k から s_{k-1} へと遷移確率を $k\mu dt$ とする．

いま，システムが状態 s_k にある確率を p_k で表わす．また，$\rho=\lambda/\mu$.とおく．まず，s_{k-1} から，s_k へ遷移するトランザクション数と s_k から，s_{k-1} へ遷移するトランザクション数は，等しいので，

$$\lambda dt p_{k-1} = k\mu dt p_k. \quad (k=0,\cdots,n) \tag{1}$$

また，

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1. \tag{2}$$

(1),(2) 式から，

$$p_k = \frac{\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)}{\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\rho^i}{i!}\right)}. \quad (k=0,\cdots,n) \tag{3}$$

さて，ここで状態 $s_k(k=1,\cdots,n)$ で終了したトランザクションが失敗終了する確率を実行中の他のトランザクション数 $k-1$ に比例すると仮定し，この比例常数を η とおく．すると，失敗終了する確率 p_F は，

$$p_F = \sum_{k=1}^{n}(k-1)\eta\frac{p_k}{(1-p_0)} = \eta\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(k-1)\rho^k}{k!}\right)}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\rho^k}{k!}\right)}. \tag{4}$$

読込みオブジェクトを更新する可能性があるトランザクションの数 m が $k-1$ に等しいならば，η はあるトランザクションの読込みオブジェクトが他の一つのトランザクションによって更新される確率 ξ に等しい．実際は，$m \geq k-1$ であるので，$\eta \geq \xi$ となる．

(4) 式から，次のことがわかる．

1) $n=1$ のとき，$p_F=0$.
2) $\rho=0$ ならば，$p_F=0$.
3) $\lim_{\rho\to\infty} p_F = (n-1)\eta$.

このことは，本稿における解析モデルの妥当性を示すものである．

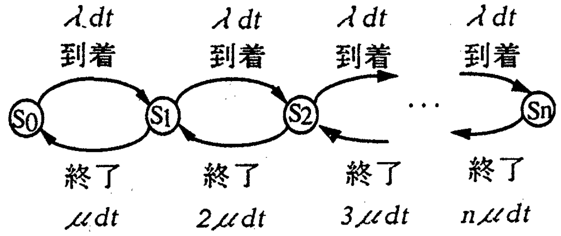

図1　マルコフ過程モデル

Analysis of Optimistic Control for Parallel Processing of Transactions
Zhiyian WANG and Fumihiro MATSUO
Faculty of Engineering, Kyushu University

3. 失敗トランザクションの再実行を考慮した楽観的制御の解析

システムに実行中のトランザクションが時間 dt 内に終了する確率をνdt とする．すると，不成功終了する確率は $p_F\nu dt$ である．失敗終了したトランザクションが，再び実行を再開するために，時間 dt 内にトラザクションの到着する確率は $(\lambda+p_F\nu)dt$ となる．つまり，ρはλ/μから$(\lambda+p_F\nu)/\mu$に変わる．ここで，$\nu=\lambda+\nu p_F$ と仮定する(実行待ちが生じない程度にρが小さいとする)と，$\nu=\lambda/(1-p_F)$ となる．(4) 式から，失敗終了する確率 p_Fは，

$$p_F=\eta\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)(\frac{\rho}{1-p_F})^k}{k!}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{(\frac{\rho}{1-p_F})^k}{k!}}. \qquad (5)$$

式 (5) の右辺を $f(p_F)$ とおく．区間 $[0,1)$ において，$f'(p_F)<1$，かつ $f(0)>0$ なので，方程式 (5) の根は，図 2 のように，$p_F^1=f(p_F^0), p_F^2=f(p_F^1)\cdots$と，近似することができる．簡単な近似解を得るため，方程式 (5) の近似解 p_Fを図 2 に示した p_F^1とする．

さて，$n=2$ のとき，式 (5) から次の解を得る．

$$p_F=\frac{(\rho+2)-\sqrt{(\rho+2)^2-8\eta\rho}}{4}. \qquad (6)$$

(6) 式の右辺を p_F^0にして式 (5) に代入すると，次の失敗終了の確率を得る．

$$p_F\approx p_F^1=\eta\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)\rho_c^k}{k!}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_c^k}{k!}}, \qquad (7)$$

ここで， $\rho_c=\frac{4\rho}{\sqrt{(\rho+2)^2-8\eta\rho}-\rho+2}$.

(7) 式から，$n=1$ のとき，$p_F=0$; $\rho=0$ ならば，$p_F=0$ であることがわかる．しかし，$\nu=\lambda+\nu p_F$ と仮定しているので，$\lim_{\rho\to\infty}p_F$は意味がない．

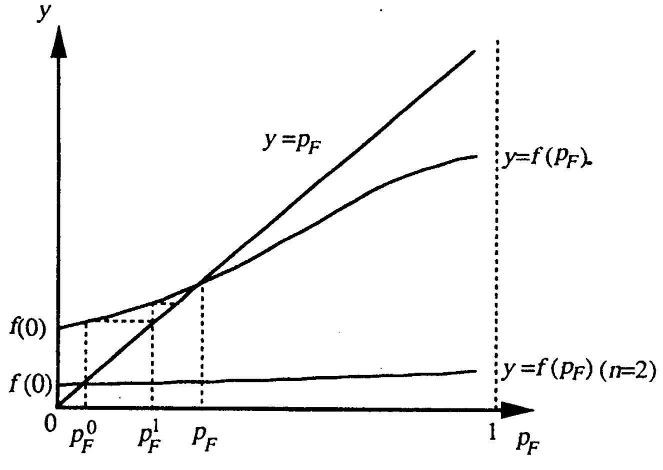

図 2　方程式 (5) の近似解

4. 予知読込み集合に対する楽観的制御の解析

この方式の場合で，各トランザクションが実行の前に，読み込もうとするオブジェクトが実行中のトランザクションによって書き換えられるかどうかを調べ，書き換えられる可能性がない場合にのみ実行を開始するような方式が考えられる．状態 $s_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ において到着したトランザクションが実行に移される確率を $\lambda(1-k\eta)dt$ とする．すると，(1) 式より，次の式を得る．

$$\lambda(1-(k-1)\eta)dtp_{k-1}=k\mu dtp_k. \qquad (k=1,\cdots,n) \quad (8)$$

(2),(8) 式から，

$$p_k=\frac{\frac{\rho^k\prod_{j=1}^{k}(1-(j-1)\eta)}{k!}}{\sum_{i=0}^{n}\frac{\rho^i\prod_{j=1}^{i}(1-(j-1)\eta)}{i!}}. \ (k=1,\cdots,n) \qquad (9)$$

状態 s_kにおいて，失敗終了する確率は，一般に$\eta(k-1)$より小さいはずである．簡単のため，状態 s_kにおいて失敗終了する確率を$\alpha\eta(k-1)$とする．ここで，$0\le\alpha\le1$．すると，失敗終了する確率 p_Fは，

$$\begin{aligned}p_F &= \frac{\sum_{k=1}^{n}(k-1)\delta\eta p_k}{1-p_0}\\ &= \alpha\eta\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^k(k-1)\prod_{j=1}^{k}(1-(j-1)\eta)}{k!}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^k\prod_{j=1}^{k}(1-(j-1)\eta)}{k!}}. \end{aligned} \qquad (10)$$

さて，不成功終了したトランザクションが，再び実行を開始することを考える場合は，その失敗終了する確率が次のようになる．まず，時間 dt 内にトランザクションの到着する確率は $(\lambda+p_F\nu)dt$ となって，ρはλ/μから$(\lambda+p_F\nu)/\mu$に変わる．また，$\nu=\lambda/(1-p_F)$ と仮定すると，式 (10) より，次の方程式を得る．

$$p_F=\alpha\eta\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{(\frac{\rho}{1-p_F})^k(k-1)\prod_{j=1}^{k}(1-(j-1)\eta)}{k!}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{(\frac{\rho}{1-p_F})^k\prod_{j=1}^{k}(1-(j-1)\eta)}{k!}}. \qquad (11)$$

(7) 式を得たのと同じ方法で近似解を求めると，失敗終了の確率 p_Fは次のようになる．

$$p_F\approx\alpha\eta\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_c^k(k-1)\prod_{j=1}^{k}(1-(j-1)\eta)}{k!}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_c^k\prod_{j=1}^{k}(1-(j-1)\eta)}{k!}}, \qquad (12)$$

ここで，$\rho_c=\frac{4\rho}{\sqrt{(\rho+2)^2-8\eta\rho}-\rho+2}$.

(12) 式の失敗終了確率は，(7) 式の確率より小さいことを示すことができる．

5. むすび

通常の楽観的並列制御方式がマルコフ過程によって解析できることを示した．この結果は，楽観的制御を採用するための評価式として用いることができる．予知読込み集合に対する楽観的制御方式を提案し，マルコフ過程モデルによる解析により，これが通常の楽観的制御方式より，効率が良いことを示した．