5S−4 分枝限定法による半順序なグラフの分割

加地太一 大内 東
北海道情報大学 北海道大学

1．はじめに

本論分ではkernighanの与えた系列グラフ分割問題を、閉路をもたない半順序なグラフに対しての分割に問題を拡張する。系列グラフは全順序に対応し、頂点番号の連続性を保つ制限によりブレーク・ポイントで分割を一意的に表現できた。これに対して半順序集合の場合に拡張するために、解析学からDedekindの切断の概念を用いることによって、半順序集合を切断決定子で下組と上組に分割し、グラフの分割を表現することを試み、その性質を明らかにする。さらに半順序を保存する最適分割を定式化できることを述べ、分枝限定法によるそのアルゴリズムを示す。

2．諸定義

a）半順序

I）$x \leqq y$かつ$y \leqq z$ならば、$x \leqq z$（推移律）

II）$x \leqq y$かつ$y \leqq x$ならば、$x = y$（反対称律）

III）$x \leqq x$（反射律）

以上の関係であり、”≦”という記号で表す。

”$x \leqq y$”は、”xはyの前にあるか、または等しい”と読み、$x \leqq y$かつ$x \neq y$のとき、”$x < y$”と書いて、”xはyの前にある”と読む。（I）、（II）、（III）から、次が成り立つ。

I´）$x < y$かつ$y < z$ならば、$x < z$（推移律）

II´）$x < y$ならば、$y \nless x$（非対称律）

III´）$x \nless x$（非反射律）

本問題のグラフでは（I´）、（II´）、（III´）の組の関係を用い、$x < y$で”ノードxからノードyへの矢線があることを示す。”

b）グラフのカットセット

$G = (V, E)$が連結で、空でない集合Wと$W' = V - W$にVが分割されているとき、WとW´を結ぶ辺の集合はGのカットセットと呼ぶ。

c）切断決定子

ブレーク・ポイントの概念に対し、Dedekindの切断の概念を導入する。Dedekindの切断は、数rをとってrよりも小なる数をすべて下組A、rより大なる数とrをすべて上組Bに入れ、組分け（A，B）を構成する。またグラフGの部分集合Aにおいて、$x \in A$のすべての直接の先行点がAに属するものを内点、そうでないものを境界点とする。これらを用いてブレーク・ポイントと同様に半順序の切断を一意に表現する切断決定子について以下に述べる。半順序集合Sから要素a_1を選び、a_1より小なる要素の集合をA_1、a_1を含んで大なる要素の集合をB_1とする。$S^1 = S - A_1 \cup B_1 \neq \phi$ならば、$S^1$と$B_1$の境界点から$a_2$を選び、それに対して同様に$A_2$、$B_2$と組分ける。$S^2 = S^1 - A_2 \cup B_2 \neq \phi$ならば$S^2$と$B_2$の境界点より$a_3$を選び同様な操作を繰り返す。Sは有限集合なので、最後に残った上組B_rの境界点を処理することで、この過程は有限回で終了する。選ばれた要素の集合$\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$を切断決定子αと呼び、$A = \{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r\}$を下組、$B = \{B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r\}$を上組とする。これは$S = A \cup B$かつ$A \cap B = \phi$を満たし、切断決定子αはその上組のすべての境界点となる。また以下の性質が成り立つ。

Partitions of Partly Ordered Graphs using of Branch and Bound

Taichi Kaji, Azuma Ohuchi
Hokkaido Information University, Hokkaido University

（1）下組Ａの任意の要素ａと下組Ｂの任意の要素ｂが比較可能ならば、かならずａ＜ｂとなる。

（2）切断決定子αによりＳの下組、上組の分割が一意に定まる。

また、すべての切断決定子からなる集合をΩとし、α_1、$\alpha_2 \in \Omega$に対して各下組をA_1、A_2とするとき、$A_1 \subset A_2$が成立するならば、α_2はα_1より優位である半順序関係が生じ、$\alpha_1 \ll \alpha_2$で表す。

3．問題の定式化

２つの切断集合$\alpha_1 \ll \alpha_2$に対してそれぞれに対応する下組をA_1、A_2とするとき、$B = A_2 - A_1$のことを$[\alpha_1、\alpha_2)$によって示し、ブロックと言う。また、そのＢの要素数をブロックサイズと言う。この切断決定子αによって決まるグラフＧのカットセットのコスト、すなわち、下組Ａ、上組Ｂとすると、

$$C(\alpha) = \Sigma_{i \in A, j \in B} c_{ij}$$

となる。ここで切断決定子α_1とα_2が$\alpha_1 \ll \alpha_2$であるならば、$\forall i \in A_2 - A_1$、$\forall j \in B_2$においてC $[\alpha_1、\alpha_2) = \Sigma_{i,j} c_{i,j}$をブロック$B = A_2 - A_1$による増分コストと呼ぶ。さらに切断決定子集合において$\alpha_1 \ll \alpha_2 \ll \cdots \alpha_m$が示されるので、この列にともなって生ずるブロック$[\alpha_{j-1}、\alpha_j)$；$j = 1, 2, \cdots, m$は互いに素であり、全体をカバーする。したがってこれらの増分コストの総和が分割によるエッジコストの総和となる。

本問題は半順序な関係をもつグラフに対して、分割された各部分集合が半順序性を保持し、また各部分集合の大きさがある正の整数ブロックサイズ以下であるという条件のもとで切断決定子によって切断されたエッジコストの総和を最小にするという問題であるので、この問題を定式化すれば

$$\mathrm{Min} \quad z = \Sigma_{j=1}^{m} [\alpha_{j-1}、\alpha_j)$$

$$\text{Sub to} \quad |[\alpha_{j-1}、\alpha_j)| \leq P$$

となる。

4．分枝限定法

系列分割問題に適用した構成法を用い、それを拡張した形で本問題のアルゴリズムの概要を示す。

```
procedure B & B
begin
  repeat
    while ("切断決定子を生成する。")
     begin
      "コストの計算"
      if ("優越テスト")
        if ("上限値テスト")
          "オープン・リストの先頭から対象ノード
           を取り出し、クローズド・リストに移動
           する。"
     end
  until ("最適解の発見")
end
```

ある切断決定子αに対して次の切断決定子の生成はαの各要素から直接派生されるすべてのノードに着目し決定を行い第一段とし、それをもとに第２段、第３段と決定を進めていく。また切断決定子の各要素の半順序関係について、小なるものから下組に処理することによって展開可能である。

参考文献

1) Brian.W.Kernighan: Optimal Sequential Partitions of Graphs, J.ACM, Vol.18, No.1, pp.34-40(1971).

2) Walter.H.Kohler: Characterization and Theoretical Comparison of Brnch-and-Bound Algorithms for Permutation Problems, J.ACM, Vol.21, No.1, pp.140-156(1974).

3)加地郁夫:半順序を保存するカスケード・グラフの最適分割についての考察，電気関係北海道大会、平成２年度、pp.276-277.

4) 加地、大内: 分枝限定法による系列グラフ分割問題の高速化と拡張、情報処理学会研究報告、91-AL-21-6(1991).