変換法を用いた環和展開形の最小化

2J－2

税　亜欣,　清水　賢資
群馬大学　工学部

1、まえがき

論理回路は　通常　AND及びORｹﾞｰﾄを基本論理素子として設計する。しかし，算術演算回路や誤り訂正符号の回路などでは　EXORｹﾞｰﾄを使用するほうが　ｹﾞｰﾄ数が大幅に削減できる[1]。

本稿では　入力変数は　肯定ﾘﾃﾗﾙと否定ﾘﾃﾗﾙ双方が利用できるものと仮定し，積項数最小の環和展開形を求めることを目的とする。始めに　任意の論理関数を環和標準形に展開し，ついで，これに　変換法を適用する。本ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑでは　始めに　k変数関数に関する最小化ﾏｯﾌﾟM^kを求め，この最小化ﾏｯﾌﾟM^kを用いて　n（<2k）変数関数の最小環和形を得ることができる。

2、環和展開形に関する定義と性質

定義1. 以下のような論理関数の展開式を環和標準展開という。

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{j=0}^{2^n-1} b_j x_1^{a1}x_2^{a2}\cdots x_n^{an}$$

ここで,$b_j\in\{0,1\}$，$ai\in\{0,1\}$，$j=\sum_{i=1}^{n} ai\times 2^{i-1}$
$x_i^0=1$,　$x_i^1=x_i$

定義2. 環和展開形には　x_iと$\overline{x_i}$が　同時に　表れてよいものとする時　この式を混合極性環和展開形とも言うが　本稿では　単に　環和展開形と呼ぶことにする。
その一般式は

$$f(X_k)=\sum_{j=0}^{3^k-1} c_j x_1^{e1}x_2^{e2}\cdots x_k^{ek}$$

である。ここで,$c_j\in\{0,1\}$,$ei\in\{0,1,2\}$,$j=\sum_{i=1}^{k} ei\times 3^{i-1}$
$x_i^0=1$,　$x_i^1=x_i$,　$x_i^2=\overline{x_i}$

性質1:　$f\cdot(g\oplus h)=f\cdot g\oplus f\cdot h$

2:　n変数関数fの環和標準形の全ての係数$b_j=1$であれば　$g\cdot\overline{f(x_1,x_2,\dots,x_n)}$
$=g\cdot\overline{x_1}\,\overline{x_2}\cdots\overline{x_n}$
ここで，f，g，hは　任意の関数である。

3:　b_jは　2値であるので　m個のb_jの論理積は　その算術平均値のflooringと　等しい。

定義3. R-Mﾏｯﾌﾟ[2]を用いて　任意の論理関数fを変換して，対応する環和標準形の展開式を求める。

$$\begin{bmatrix} \\ \text{R－M} \\ \\ \text{マップ} \\ \\ \end{bmatrix}^{n} \circledast \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{2^n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{2^n-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_1x_2\cdots x_n \end{matrix}$$

ここで，$f_0=f(0,0,\dots,0)$，$f_1=f(0,0,\dots,1)$，……，$f_{2^n-1}=f(1,1,\dots,1)$；$\circledast$は　ﾏﾄﾘｸｽの乗算に置いて,加算は　2を法とすることを意味する。
R-Mﾏｯﾌﾟの再帰的定義を　以下に示す。

$$\begin{bmatrix} \\ \text{R－M} \\ \\ \text{マップ} \\ \\ \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} [\text{R-M}]^{n-1} & 0 \\ [\text{R-M}]^{n-1} & [\text{R-M}]^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{R-M} \end{bmatrix}^{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

定理1. R-Mﾏｯﾌﾟを用いて　任意の論理関数は　環和標準形に　一意に　展開できる。

定義4. あるﾏﾄﾘｸｽ$M=\{m_{ij}\}_{1\times k}$とする。
Mのflooringを　$\lfloor M\rfloor=\{\lfloor m_{ij}\rfloor\}_{1\times k}$と定義する。

3、最小化ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ

3．1　k変数の最小化ﾏｯﾌﾟM^kを作る手続き

M^kには　全てのk変数関数の最小環和展開形に関する情報をできるだけ　完全に納格し，それで　n（<2k）変数関数の最小化を行う。これは　本ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑのﾎﾟｲﾝﾄである。最適なM^kを一度作れば　n（<2k）変数関数の最小化が　単に行列式の計算に従って行える。

3-1-1　関数の2進表現から　R-Mﾏｯﾌﾟを用いて　環和標準展開形に変換する。（その全ての関数の最小環和展開形が　もう分かっているとする。k=2の場合には　視察により　明かである。それ以上の場合には　本ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑによって　再帰的に求める。）

3-1-2　$f(X_k)$を　最適な環和展開形で　表す。

M^kを作るために　k変数関数に対する環和展開の係数c_iの決め方が　重要である。環和展開式の係数が少なければ少ないほど　kMAPの占める空間が小さくなる。

一つの関数に対して　その最小環和展開は一通りではない。それ故，M^kに最大限に　k変数関数に関する最小環和展開を含ませるために　その異なる環和展開をできるだけそのP-同値類に分配する。そうすると　将来　n変数関数を最小化する時にその変数に関する環和標準展開式の係数b_iの位置を変えることによって　その全ての環和展開式が　計算できる。表1には　2変数関数のM^2を作るために　用いた環和展開式の係数とその環和標準展開式の係数の関係の真理値表である。

表1：c_j（j=0,..,6）の値とb_i（i=0,1,2,3）の値との関係の真理値表
（2変数関数の環和展開形=$c_0\oplus c_1x_1\oplus c_2\overline{x_1}\oplus c_3x_2\oplus c_4x_1x_2\oplus c_5\overline{x_1}x_2\oplus c_6\overline{x_1}\,\overline{x_2}$とする。ここで,$c_i\in\{0,1\}$。）

Minimization of Ring-sum Expansions
Using Transform Methods
Y.-X. Shui,　K. Shimizu
Gunma University

	b_0	b_1	b_2	b_3	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
A	0	0	0	0							
B	0	0	0	1					1		
C	0	0	1	0				1			
D	0	0	1	1						1	
E	0	1	0	0		1					
F	0	1	0	1		1			1		
G	0	1	1	0		1		1			
H	0	1	1	1	1						1
I	1	0	0	0	1						
J	1	0	0	1	1				1		
K	1	0	1	0	1			1			
L	1	0	1	1	1					1	
M	1	1	0	0			1				
N	1	1	0	1				1			1
O	1	1	1	0					1		1
P	1	1	1	1							1

3-1-3最小化ﾏｯﾌﾟ M^k と補助ﾏｯﾌﾟ T^k を作る。

表1の真理値表によって　環和標準展開式の係数bに関する関数 c_i（環和展開式の係数）の環和標準展開をｶﾙﾉｰ図或はR-Mﾏｯﾌﾟを用いて　求めることができる。その結果は

$$c_0 = b_0 \oplus b_0 b_1 \oplus b_1 b_2 b_3 \oplus b_0 b_1 b_2 b_3$$
$$c_1 = b_1 \oplus b_0 b_1 \oplus b_1 b_2 b_3 \oplus b_0 b_1 b_2 b_3$$
$$c_2 = b_0 b_1 \oplus b_0 b_1 b_2 \oplus b_0 b_1 b_3 \oplus b_0 b_1 b_2 b_3$$
$$c_3 = b_2 \oplus b_2 b_3 \oplus b_0 b_1 b_2 \oplus b_0 b_1 b_3$$
$$c_4 = b_3 \oplus b_2 b_3 \oplus b_0 b_1 b_2 \oplus b_0 b_1 b_3$$
$$c_5 = b_2 b_3 \oplus b_1 b_2 b_3$$
$$c_6 = b_0 b_1 b_2 \oplus b_0 b_1 b_3 \oplus b_1 b_2 b_3$$

行列式で表せば,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 10} \circledast \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_0 b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_2 b_3 \\ b_0 b_1 b_2 \\ b_0 b_1 b_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ b_0 b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix} = \left.\begin{matrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{matrix}\right] \begin{matrix} 1 \\ x1 \\ \overline{x}_1 \\ x_2 \\ \overline{x}_1 x_2 \\ x_2 \\ \overline{x}_1 \overline{x}_2 \end{matrix}$$

である。左の7行10列のﾏｯﾌﾟを2変数最小化ﾏｯﾌﾟ M^2 と呼ぶ.性質3によって,左2番目のﾏﾄﾘｸｽを次の行列演算で求める。

$$\left\lfloor \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}_{10 \times 4} * \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right\rfloor = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_0 b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_2 b_3 \\ b_0 b_1 b_2 \\ b_0 b_1 b_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ b_0 b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix}$$

左の10行4列のﾏｯﾌﾟを2変数の補助ﾏｯﾌﾟ T^2 と呼ぶ。

3．2　M^k と T^k を用いて　n（<2k）変数の関数を最小化する手続き：

3-2-1　R-Mﾏｯﾌﾟを用いて　与えられた関数の環和標準形を求める。

3-2-2　環和標準形の係数 b_t（$0 \leq t < 2^k$）を $B_{2^k \times 2^k}$ に入れる。$B_{2^k \times 2^k} = \{b_{ij} \mid b_{ij} = b_t,\ t = i \times 2^k + j,\ 0 \leq (i, j) \leq 2^k$, b_t はn変数関数の環和標準形の係数で, $t \geq 2^n$ の時に $b_t = 0\}$

3-2-3　式 $\lfloor (M^k \circledast \lfloor T^k * B \rfloor) * [T^k]^t \rfloor \circledast [M^k]^t$ によって　環和展開形の係数を求める。

3-2-4　環和標準展開の積項を置換して　3-2-2に戻る。

n変数関数は対称変数がない場合に　その異なる置換数は　n！であるが　最小化ﾏｯﾌﾟ M^k のk変数関数の最小環和展開形に関する情報量が　足りない場合がある。例えば,

$$f(x) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 = x_2 \oplus \overline{x}_1 \overline{x}_2 = 1 \oplus x_1 \overline{x}_2 = \overline{x}_1 \oplus x_1 x_2$$

4つの場合がある。2変数最小化ﾏｯﾌﾟ M^2 を作った時に 二つの場合（2,3表1のNとL）しか　入れなかった。しかし,その2変数関数を3変数と見なせば　$x_1, x_1 x_2$ の係数 $b_1, b_3 = 1$ を $x_3, x_2 x_3$ の係数 b_4, b_6 の位置を置き換えれば,先ず x_3 と x_2 に関して（即ち $(1 \oplus 0 \cdot x3 \oplus 0 \cdot x2 \oplus 0 \cdot x3x2) \oplus (1 \oplus 0 \cdot x3 \oplus 1 \cdot x2 \oplus 0 \cdot x3x2)x1$）最小化し,それで x1に関して（即ち $(1 \oplus x1) \oplus 0 \cdot x3 \oplus (0 \oplus x1)x2 \oplus 0 \cdot x3x2$）最小化することになってしまう。その解は　f(x)の第4の場合である。以上によって　この繰り返しﾙｰﾌﾟは　最悪の場合に（n+1）！回の（n+1）変数の置換が必要である.対称変数がある場合に このﾙｰﾌﾟの回数が　それより　少なくなる。

3-2-5　(n+1)！個以下の置換の結果から最小環和展開形を選ぶ。

4、実験結果と考察

提案されたｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑを利用して M^2 を作り,全ての3変数関数の最小環和展開を求めた。4変数の場合に [3]に示した4変数NP同値類代表関数のAND-EXOR最小論理式の表と　比較して　ほぼ　一致した。M^3 を用いれば　最小環和展開形になると　予想される。

5、あとがき

本ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑにより　4変数まで　実現できた.より多くのn変数についても　原理的には　可能である。また　理論的な検討が　今後の課題である。

参考文献

[1] 笹尾,Ph.W.Besslich,"EXORｱﾚｲ付きPLAの複雑度,"電子通信学会ＦＴＳ研究会,FTS86-17,1986-11.

[2] T.Damarla and M.G.Karpovsky,"Reed-Muller spectral techniques for fault detection",Second Int.Workshop on spectral Technichques,Ecole Polytehnique de Montreal,Canada,Oct.1986.

[3] 笹尾,東田,"入力ﾃﾞｺｰﾀﾞ付きAND-EXOR形PLAの設計ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑについて,"第20回FTC研究会資料,1989.1.24