# 創立 40 周年記念論文

# 代用電荷法による非有界な多重連結領域の 統一的な数値等角写像の方法

#### Ŧ 野 要↑ **大**† 秃 **教**† 出 野 緒 方 **E**<sup>††</sup> 亚 杉 原 īĒ 錮††† ト

平行な直線スリット,原点を中心とする同心円弧状の曲線スリット,原点を中心とする放射状の直 線スリットをともなう複素平面の全体をそれぞれ平行スリット領域,円弧スリット領域,放射スリッ ト領域と呼ぶ.本論文では,ポテンシャル問題の高精度高速解法として知られている代用電荷法を適 用して,与えられたいくつかのJordan 閉曲線の外側の非有界な多重連結領域から,平行スリット領 域,円弧スリット領域,放射スリット領域への統一的な数値等角写像の方法を提案し,その有効性を 数値実験的に検証する.具体的には,これらの等角写像の問題を1対の共役な調和関数を求める問 題に帰着させ,それらの調和関数を複素対数ポテンシャルの1次結合で近似する.最終的には,すべ ての問題が同じ係数行列を持つ連立1次方程式に帰着し,電荷数の3乗の計算量を要するLU分解 は1度行えばよい.近似写像関数は複素対数関数の数値計算に主値を用いて連続であり,座標のス ケール変換に対して自然な不変性を示す.これらの等角写像は2次元ポテンシャル流解析への応用上 重要な広く知られた問題であり,簡単で精度の高い近似写像関数の構成法は理論と応用をつなぐべき missing link であった.

# A Systematic Scheme of Numerical Conformal Mappings of Unbounded Multiply-connected Domains by the Charge Simulation Method

# KANAME AMANO,<sup>†</sup> DAI OKANO,<sup>†</sup> HIDENORI OGATA,<sup>†</sup> HIROMI SHIMOHIRA<sup>††</sup> and MASAAKI SUGIHARA<sup>†††</sup>

The parallel, circular and radial slit domains are the entire planes with parallel rectilinear slits, circular slits concentric to the origin and radial slits pointing at the origin, respectively. We here present a simple method of numerical conformal mappings of an unbounded multiply-connected domain exterior to closed Jordan curves onto the parallel, circular and radial slit domains. These conformal mappings are familiar in science and engineering, and especially important in problems of two-dimensional potential flows around obstacles with vortices and point-sources or sinks together with a uniform flow. But, no systematic method of computation has been established. We reduce the problems of conformal mapping to the Dirichlet problem with a pair of conjugate harmonic functions and employ the charge simulation method, where the conjugate harmonic functions are approximated by a linear combination of complex logarithmic potentials. The problems are finally reduced to a set of linear equations with a same coefficient matrix. The approximate mapping functions are continuous and analytic using the principal value of logarithmic function, and invariant to the scaling of the coordinate system. The numerical method for simple, accurate approximate mapping functions was a *missing link* between theory and applications of the conformal mappings.

† 愛媛大学工学部情報工学科

Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Ehime University

†† NTT コミュニケーションウェア株式会社 NTT Communicationware Corporation

††† 名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻 Department of Computational Science and Engineering, Graduate School of Engineering, Nagoya University

#### 1. はじめに

等角写像は関数論の基本的な問題の1つであり,物 理学や工学への応用も広い<sup>17),21),26)</sup>.しかし,その 写像関数を初等関数で記述できる場合は限られてい る.多くの場合,与えられた条件を満たす写像関数を 求める問題は数値計算によらなければならない.等 角写像の数値計算法すなわち数値等角写像の方法は 数値解析の課題の1つとして古くから研究されている<sup>15),18),23),31)</sup>.

Riemann の写像定理によれば,少なくとも2つの 境界点を持つ任意の単連結領域 D は互いに等角同値 であり,いずれも単位円の内部に等角写像することが できる.その写像関数 w = f(z) は D 内の1 点  $z_0$ における正規化条件  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) > 0$  のもとに 一意的に定まる.しかし,解の存在と一意性は知られ ていても,f(z)の近似写像関数を高い精度で効率良 く構成することは決して簡単ではない.

このような数値等角写像の方法としては Symm の 積分方程式法<sup>28)~30)</sup>が著名である.これは1対の共役 な調和関数を1重層複素対数ポテンシャルで表現し, 等角写像の問題を境界上で定義されたソース密度を未 知量とする第1種 Fredholm型の積分方程式に帰着さ せたものである.その後,ソース密度の近似には様々 な改良が加えられている<sup>16),19),20)</sup>.天野<sup>1)~6)</sup>は同じ 問題にポテンシャル問題の高精度高速解法として知ら れている代用電荷法<sup>24),25),27)</sup>を適用した.これは1対 の共役な調和関数を複素対数ポテンシャルの1次結合 で近似し,等角写像の問題を領域の外部に配置した仮 想的な点電荷の電荷量を未知量とする連立1次方程式 に帰着させたものである.この方法もまた Symm の 積分方程式におけるソース密度の近似法の1つである と解釈することができる<sup>10)</sup>.

多重連結領域の等角写像の問題は単連結領域の場合 と様相が異なる.まず,単位円の内部のような単一の 理想的な標準領域は存在しない.このことは等角写像 が領域の多重度を保存することから明らかである.さ らに,多重度を固定してもなお単一の標準領域は存在 しない.相互に等角写像できるのはモジュラスと呼ば れる保存量が同じ領域間に限られる.しかし,領域の 幾何学的な形状に着目すれば,多重連結領域の問題を 多重度とモジュラスの値を固定することなく議論する ことが可能である.Nehari<sup>26)</sup>は代表的な標準領域と して,平行スリット領域,円弧スリット領域,放射ス リット領域,円弧スリットをともなう円板領域,円弧 スリットをともなう円環領域,をあげている.任意の 多重連結領域はこれらの標準領域へ等角写像すること ができる.

このような多重連結領域の等角写像は応用上重要で 広く知られた問題である.しかし,その数値計算法は 必ずしも十分に研究されていなかった.特に,いくつ かの Jordan 閉曲線の外側の無限遠点を含む非有界な 多重連結領域から,平行スリット領域,円弧スリット 領域,放射スリット領域,への等角写像は2次元ポテ ンシャル流解析への応用上重要である.しかし,簡単 で精度の高い数値計算法はほとんど知られていなかっ た.実際,これらの等角写像の写像関数を利用して障 害物の周囲の平行流,渦流,湧き出し(吸い込み)流 等の解析が可能であることは多くのテキストに記され ている<sup>17),21)</sup>.しかし,その写像関数の一般的な構成 法に関する記述は皆無に近い.精度と効率の良い近似 写像関数の構成法はこれらの等角写像の理論と応用を つなぐべき missing link であった.

本論文では、このような非有界な多重連結領域から、 平行スリット領域、円弧スリット領域、放射スリット 領域、への統一的な数値等角写像の方法を提案し、そ の有効性を数値実験的に検証する.また、典型的なポ テンシャル流の問題に適用する.その内容は多重連結 領域の数値等角写像の方法に関するこれまでの研究成 果<sup>7)~9),11)~13)</sup>を集成したものである.しかし、最近 の研究<sup>14)</sup>に基づいて、必要かつ十分で簡潔な記述と なるように再構成されている.

#### 2. 代用電荷法の原理

問題の領域を D,その境界を C として,2次元 Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$\Delta g(z) = 0 \quad (z \in D), \tag{1}$$

$$g(z) = b(z) \quad (z \in C) \tag{2}$$

を考える.ここに,  $g(z) \ge b(z)$ は  $g(x,y) \ge b(x,y)$ (z = x + iy)の省略形で, b(z)は境界値関数である.

代用電荷法<sup>24),27)</sup> では,解である調和関数 g(z) を 領域 D の外部に配置した電荷点  $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$  を極 とする対数ポテンシャルの 1 次結合

$$G(z) = \sum_{i=1}^{N} Q_i \log |z - \zeta_i|$$
(3)

で近似する .未定係数である電荷 *Q*<sub>1</sub>,*Q*<sub>2</sub>,...,*Q<sub>N</sub>* は境 界 *C* 上に配置した電荷と同数の拘束点 *z*<sub>1</sub>,*z*<sub>2</sub>,...,*z<sub>N</sub>* で境界条件 (2) を満たすように定める.すなわち,拘 束条件と呼ばれる連立1次方程式

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i \log |z_j - \zeta_i| = b(z_j)$$
(4)  
(j = 1, 2, ..., N)

の解である.

近似解 G(z) は厳密に Laplace 方程式 (1) を満たす. したがって,調和関数の最大値の原理から,領域 D が有界であれば誤差は境界上で最大値をとり,

 $|G(z) - g(z)| \le \max_{z \in C} |G(z) - b(z)|$ 

$$\simeq \max_{1 \le j \le N} |G(z_{j+1/2}) - b(z_{j+1/2})|$$
(5)

となる.ここに, $z_{j+1/2}$ は境界C上の拘束点 $z_j$ と $z_{j+1}$ の中間点である.

この方法は,原理と計算が簡単であるにもかかわらず,なめらかな境界と境界値の問題に対しては非常に 高い精度を与える.

Katsurada ら<sup>22)</sup> は代用電荷法の収束性にはじめて 数学的証明を与えた.彼らは,円板領域で境界値が解 析的なら,最大誤差が $\tau^N$  ( $0 < \tau < 1$ )のオーダーに なることを示した.この性質は誤差の指数的減少と呼 ばれる.その後,証明は円環領域や解析曲線に囲まれ た単連結領域へと拡張されている.

室田<sup>25)</sup>は解を

$$G(z) = Q_0 + \sum_{i=1}^{N} Q_i \log |z - \zeta_i|$$
(6)

と近似し,定数項  $Q_0$  と電荷  $Q_1,Q_2,\dots,Q_N$  を制約 条件

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i = 0 \tag{7}$$

のもとで定めることを提案した.この方法は物理的 に自然で,数学的な性質も良く,不変スキームと呼ば れる.

我々は等角写像の問題を1対の共役な調和関数を求 める問題に帰着させ,対数ポテンシャルを複素関数に 拡張して,複素対数ポテンシャルを用いた代用電荷法 を適用する.

3. 平行スリット領域への数値等角写像の方法

3.1 写像定理

まず, z (= x + iy) 平面上の Jordan 閉曲線  $C_1, C_2, \ldots, C_n$  の外側の無限遠点を含む非有界な n重連結領域 D から, w (= u + iv) 平面上の虚軸に平 行(実部一定)または実軸に平行(虚部一定)な平行 スリット領域への等角写像を考える(図1).その写像 関数を  $w = f_u(z)$ または  $w = f_v(z)$ とし,特に区別 する必要のない場合には両者を単に f(z)と記す.こ れらの等角写像は無限遠点における Laurent 級数が

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots,$$
 (8)

すなわち  $f(\infty) = \infty$ ,  $f'(\infty) = 1$ , 定数項  $a_0 = 0$  という正規化条件のもとに一意的に定まる.

写像の結果,曲線  $C_1, C_2, \ldots, C_n$  はそれぞれ  $u = u_1, u_2, \ldots, u_n$  または  $v = v_1, v_2, \ldots, v_n$  上



- 図 1 代用電荷法による平行,円弧,放射スリット領域への数値等 角写像
- Fig. 1 Numerical conformal mappings onto the parallel, circular and radial slit domains by the charge simulation method.

に位置する平行スリット  $S_{u1}, S_{u2}, \ldots, S_{un}$  または  $S_{v1}, S_{v2}, \ldots, S_{vn}$  に移る.スリットの位置と長さは 正規化条件に対して写像関数とともに定まる.

# 3.2 代用電荷法の適用

上記の写像関数を

f(z) = z + g(z) + ih(z)(9)

と表現する.ここに,g(z) と h(z) は D で互いに共 役な調和関数で,境界条件

$$\operatorname{Re} f_u(z) = g_u(z) + x = u_m \tag{10}$$

または

$$Im f_v(z) = h_v(z) + y = v_m$$
(11)  
(z \in C\_m; m = 1, 2, ..., n)

と、正規化条件  $\lim_{z\to\infty} (f(z) - z) = 0$  すなわち  $q(\infty) + ih(\infty) = 0$  (12)

を満たさなければならない.解の存在と一意性から,問題はこのような1対の共役な調和関数 $g_u(z)$ と $h_u(z)$ または $g_v(z)$ と $h_v(z)$ を求めることに帰着する.

代用電荷法を適用して,g(z) + ih(z)を

$$G(z) + iH(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li})$$
(13)

で近似する.ここに, $Q_0$  は複素定数, $\zeta_{li}$  は問題の領 域 D の外部すなわち閉曲線  $C_l$  の内側に  $N_l$  個ずつ 配置した電荷点である.近似関数 (13) は次の 3 条件 を満たさなければならない.

(1) 拘束条件:曲線 C<sub>m</sub> 上に N<sub>m</sub> 個ずつ配置した拘
 束点 z<sub>mj</sub> 上で境界条件 (10) または (11) を課して,

$$\operatorname{Re} Q_0 + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log |z_{mj} - \zeta_{li}| - U_m = -x_{mj}$$
(14)

または

$$\operatorname{Im} Q_0 + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \arg(z_{mj} - \zeta_{li}) - V_m = -y_{mj}$$
(15)

$$(z_{mj} \in C_m; j = 1, 2, \dots, N_m; m = 1, 2, \dots, n)$$

でなければならない.ここに, $U_m$ , $V_m$ は $u_m$ , $v_m$ の近似値である.

(2) 正規化条件:無限遠点における条件(12)から

$$Q_0 + \lim_{z \to \infty} \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li}) = 0$$

すなわち

$$Q_0 = 0, \quad \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \tag{16}$$

でなければならない.

(3) 1 価性条件: 複素関数 (13) が D で 1 価であるためには, D 内の任意の閉曲線を  $\tilde{C}$ ,  $C_l$ のみを囲む閉曲線を  $\tilde{C}_l$ として,

$$\int_{\tilde{C}} \mathrm{d}H(z) = 0$$

すなわち

$$\int_{\tilde{C}_{l}} dH(z) = \int_{\tilde{C}_{l}} d\sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_{m}} Q_{mi} \arg(z - \zeta_{mi})$$
$$= \sum_{i=1}^{N_{l}} Q_{li} \int_{\tilde{C}_{l}} d\arg(z - \zeta_{li})$$
$$+ \sum_{m=1(\neq l)}^{n} \sum_{i=1}^{N_{m}} Q_{mi} \int_{\tilde{C}_{l}} d\arg(z - \zeta_{mi})$$
$$= 2\pi \sum_{i=1}^{N_{l}} Q_{li} = 0 \quad (l = 1, 2, ..., n),$$

結局

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$
(17)

でなければならない.

基本的には,これらの3条件が未知量である複素定数 $Q_0$ と電荷 $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{nN_n}$ およびスリットの位置 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ または $V_1, V_2, \ldots, V_n$ に対する $N_1 + N_2 + \cdots + N_n + n + 2$ 元連立1次方程式を構成する.実際には,式(16)のように

 $Q_0 = 0$  (18) であるから、この  $Q_0$  は消去することができる.こうし て、 $Q_0$  を消去した式 (14) または (15) と式 (17) が電荷  $Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{nN_n}$  とスリットの位置  $U_1, U_2, \dots, U_n$ または  $V_1, V_2, \dots, V_n$  に対する  $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$ 元連立 1 次方程式を構成する.

近似関数 (13) の代わりに,複素定数項  $Q_0$  を導入しない代用電荷法を適用しても同じ結果が得られる $^{7)\sim9),11)\sim13}$ .しかし,この  $Q_0$ の導入によって,1 価性条件の成立がそのまま無限遠点における正規化条件の成立を意味するものではないことが明らかになる.

複素対数関数の数値計算には主値を用いる.主値を 用いて連続な近似写像関数を構成するためにはさらに 工夫が必要である.閉曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ がそれぞ れの内側の $1 \leq \zeta_{10}, \zeta_{20}, \ldots, \zeta_{n0}$ に対して星形であれ ば,式(17)と式(18)を用いて,近似関数(13)を

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li})$$
$$- \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{l0})$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}}\right)$$
(19)

と変形することができる.一般の場合には,

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li})$$
  
=  $\sum_{l=1}^{n} \left\{ Q_{l1} \log(z - \zeta_{l1}) + \sum_{i=2}^{N_l} \left( \sum_{k=1}^{i} Q_{lk} - \sum_{k=1}^{i-1} Q_{lk} \right) \log(z - \zeta_{li}) \right\}$   
=  $\sum_{l=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{N_l-1} \left( \sum_{k=1}^{i} Q_{lk} \right) + \left( \log(z - \zeta_{li}) - \log(z - \zeta_{li+1}) \right) + \left( \sum_{k=1}^{N_l} Q_{lk} \right) \log(z - \zeta_{lN_l}) \right\}$ 

=

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l-1} \left( \sum_{k=1}^{i} Q_{lk} \right) \log \left( \frac{z-\zeta_{li}}{z-\zeta_{li+1}} \right)$$
(20)

と変形して,未知量を電荷から電荷の部分和

$$Q_l^i = \sum_{k=1}^i Q_{lk}$$
(21)  
(*i* = 1, 2, ..., *N*<sub>l</sub> - 1; *l* = 1, 2, ..., *n*)

に変換する.式 (19) の主値  $\text{Log}((z - \zeta_{li})/(z - \zeta_{l0}))$ の不連続は  $\zeta_{li}$  と  $\zeta_{l0}$  を結ぶ直線上に,式 (20) の主 値  $\text{Log}((z - \zeta_{li})/(z - \zeta_{li+1}))$ の不連続は  $\zeta_{li}$  と  $\zeta_{li+1}$ を結ぶ直線上に現れる.

こうして,問題の領域 D で1価連続な近似写像関 数を構成することができる:

スキーム(P-Starlike) 曲線  $C_1, C_2, \ldots, C_n$  がそれ ぞれの内側の 1 点  $\zeta_{10}, \zeta_{20}, \ldots, \zeta_{n0}$  に対して星形であ れば,近似写像関数を

$$F(z) = z + G(z) + iH(z),$$
(22)  
$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}}\right)$$
(23)

と表現することができる.電荷  $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{nN_n}$ と スリットの位置  $U_1, U_2, \ldots, U_n$ または  $V_1, V_2, \ldots, V_n$ は  $N_1 + N_2 + \ldots + N_n + n$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{z_{mj} - \zeta_{l0}} \right| - U_m = -x_{mj}$$
(24)

または

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \arg\left(\frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{z_{mj} - \zeta_{l0}}\right) - V_m = -y_{mj}$$
(25)

$$(z_{mj} \in C_m; j = 1, 2, \dots, N_m; m = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{li} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$
(26)

の解である.

スキーム(P-General) 一般の場合には,近似写像 関数を

$$F(z) = z + G(z) + iH(z), \qquad (27)$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i \log\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{li+1}}\right)$$
(28)

と表現する.電荷の部分和  $Q_1^1, Q_1^2, \dots, Q_n^{N_n-1}$  とス

リットの位置  $U_1, U_2, \dots, U_n$  または  $V_1, V_2, \dots, V_n$  は  $N_1 + N_2 + \dots + N_n$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{z_{mj} - \zeta_{li+1}} \right| - U_m = -x_{mj}$$
(29)

または

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i \arg\left(\frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{z_{mj} - \zeta_{li+1}}\right) - V_m = -y_{mj}$$
(30)
$$(z_{mj} \in C_m; \ j = 1, 2, \dots, N_m; \ m = 1, 2, \dots, n)$$

の解である.

 円弧,放射スリット領域への数値等角写像 の方法

### 4.1 写像定理

次に,前章と同じ非有界な n 重連結領域 D から, 円弧スリット領域および放射スリット領域への等角写 像を考える(図1).その写像関数を  $w = f_c(z)$  およ び  $w = f_r(z)$  とし,特に区別する必要のない場合に は両者も単に f(z) と記す.これらの等角写像は正規 化条件 f(0) = 0,  $f(\infty) = \infty$ ,  $f'(\infty) = 1$  のもとに 一意的に定まる.無限遠点における条件は Laurent 級 数が

$$f(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots$$
 (31)

であることを意味する.

写像の結果,曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ はそれぞれ原点を 中心とする半径が $r = r_1, r_2, \ldots, r_n$ なる円弧スリッ ト $S_{c1}, S_{c2}, \ldots, S_{cn}$ および偏角が $\theta = \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ なる放射スリット $S_{r1}, S_{r2}, \ldots, S_{rn}$ に移る.スリット の位置と長さは正規化条件に対して写像関数とともに 定まる.

#### 4.2 代用電荷法の適用

上記の写像関数を

$$f(z) = z \exp(g(z) + ih(z)) \tag{32}$$

と表現すれば,境界条件が

$$\log |f_c(z)| = g_c(z) + \log |z| = \log r_m \tag{33}$$

$$\texttt{stat}$$

$$\arg f_r(z) = h_r(z) + \arg z = \theta_m \tag{34}$$

$$(z \in C_m; m = 1, 2, \dots, n)$$

となること以外は平行スリット領域の場合とまったく 同様に代用電荷法を適用することができる:

スキーム(CR-Starlike) 曲線  $C_1, C_2, \ldots, C_n$  がそ れぞれの内側の 1 点  $\zeta_{10}, \zeta_{20}, \ldots, \zeta_{n0}$  に対して星形で あれば,近似写像関数を

$$F(z) = z \exp(G(z) + iH(z)),$$
(35)  
$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}}\right)$$
(36)

と表現することができる.電荷  $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{nN_n}$ とスリットの半径(の対数) $\log R_1, \log R_2, \ldots, \log R_n$ または偏角  $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ は  $N_1 + N_2 + \ldots + N_n + n$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{z_{mj} - \zeta_{l0}} \right| - \log R_m = -\log |z_{mj}|$$
(37)

または

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \arg\left(\frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{z_{mj} - \zeta_{l0}}\right) - \Theta_m = -\arg z_{mj}$$

$$(38)$$

$$(z_{mj} \in C_m; \ j = 1, 2, \dots, N_m; \ m = 1, 2, \dots, n),$$
  
 $\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n)$  (39)

の解である.

スキーム(CR-General) 一般の場合には,近似写 像関数を

$$F(z) = z \exp(G(z) + iH(z)), \qquad (40)$$
  

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l - 1} Q_l^i \log\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{li+1}}\right) \qquad (41)$$

と表現する.電荷の部分和  $Q_1^1, Q_1^2, \ldots, Q_n^{N_n-1}$  とス リットの半径(の対数)  $\log R_1, \log R_2, \ldots, \log R_n$  ま たは偏角  $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$  は  $N_1 + N_2 + \ldots + N_n$  元 連立 1 次方程式

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{z_{mj} - \zeta_{li+1}} \right| - \log R_m = -\log|z_{mj}|$$
(42)

または

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i \arg\left(\frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{z_{mj} - \zeta_{li+1}}\right) - \Theta_m = -\arg z_{mj}$$
(43)

 $(z_{mj} \in C_m; j = 1, 2, \dots, N_m; m = 1, 2, \dots, n)$ 

の解である.

5. 平行,円弧,放射スリット領域への統一的 な数値等角写像の方法

以上の近似写像関数の構成法には次の関係がある.

- F<sub>u</sub>(z) と F<sub>v</sub>(z) の問題は対をなし,拘束条件が 複素対数ポテンシャルの実部と虚部に課される.
- *F<sub>c</sub>(z)* と *F<sub>r</sub>(z)*の問題は対をなし,拘束条件が複 素対数ポテンシャルの実部と虚部に課される.
- F<sub>u</sub>(z) と F<sub>c</sub>(z) および F<sub>v</sub>(z) と F<sub>r</sub>(z) の問題に 対して解くべき連立1次方程式の係数行列はそれ ぞれ同一である.

5.1 統一的表現

これらの方法は次のように変形することができる. スキーム(PCR-Starlike)曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ が それぞれの内側の $1 \le \zeta_{10}, \zeta_{20}, \ldots, \zeta_{n0}$ に対して星形 であれば,近似写像関数を

$$F_u(z) = z + G(z) + iH(z), \qquad (44)$$

$$F_{v}(z) = z + i(G(z) + iH(z)),$$
(45)

$$F_c(z) = z \exp(G(z) + iH(z)), \qquad (46)$$

$$F_r(z) = z \exp(\mathrm{i}(G(z) + \mathrm{i}H(z))), \qquad (47)$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}}\right) \quad (48)$$

と表現することができる.電荷  $Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{nN_n}$ とスリットの位置  $S_1, S_2, \dots, S_n$  は  $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{z_{mj} - \zeta_{l0}} \right| - S_m = -t_{mj}$$

$$(49)$$

$$(z_{mj} \in C_m; \ j = 1, 2, \dots, N_m; \ m = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad (50)$$

の解である.ここに,

 $S_{m} = U_{m}, \ t_{mj} = x_{mj} \text{ for } F_{u}(z),$ (51)  $S_{m} = V_{m}, \ t_{mj} = y_{mj} \text{ for } F_{v}(z),$ (52)  $S_{m} = \log R_{m}, \ t_{mj} = \log |z_{mj}| \text{ for } F_{c}(z),$ (53)

$$S_m = \Theta_m, \ t_{mj} = \arg z_{mj} \text{ for } F_r(z)$$
 (54)

スキーム(PCR-General) 一般の場合には,近似 写像関数を

$$F_u(z) = z + G(z) + iH(z), \qquad (55)$$

$$F_v(z) = z + i(G(z) + iH(z)), \tag{56}$$

$$F_c(z) = z \exp(G(z) + iH(z)), \qquad (57)$$

$$F_r(z) = z \exp(\mathrm{i}(G(z) + \mathrm{i}H(z))), \tag{58}$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i \log\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{li+1}}\right)$$
(59)

と表現する.電荷の部分和  $Q_1^1, Q_1^2, \dots, Q_n^{N_n-1}$  とス リットの位置  $S_1, S_2, \dots, S_n$  は  $N_1 + N_2 + \dots + N_n$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{z_{mj} - \zeta_{li+1}} \right| - S_m = -t_{mj}$$
(60)

 $(z_m \in C_m; j = 1, 2, \dots, N_m; m = 1, 2, \dots, n)$ 

の解である.ここに,

$$S_m = U_m, \ t_{mj} = x_{mj} \text{ for } F_u(z),$$
 (61)

$$S_m = V_m, \ t_{mj} = y_{mj} \text{ for } F_v(z),$$
 (62)

$$S_m = \log R_m, \ t_{mj} = \log |z_{mj}| \text{ for } F_c(z),$$

(63)

$$S_m = \Theta_m, \ t_{mj} = \arg z_{mj} \text{ for } F_r(z)$$
 (64)  
である.

以上のスキームはすべて領域 D で連続な不変スキー ムである.不変性とは,座標のスケール変換に対して,  $z \to \alpha z$ ,  $\zeta_{l0} \to \alpha \zeta_{l0}$ ,  $\zeta_{li} \to \alpha \zeta_{li} \Rightarrow F(z) \to F(\alpha z)$ ( $\alpha > 0$ )なることを意味する.すなわち,スケール 変換後の平面上の問題に対しても電荷  $Q_{li}$ の値はそ のまま(スリットの位置については, $U_m \to \alpha U_m$ ,  $V_m \to \alpha V_m$ ,  $R_m \to \alpha R_m$ ,  $\Theta_m \to \Theta_m$ )である.

5.2 誤差評価

問題の領域 D は有界ではないが,  $F_u(z) \geq F_v(z)$ の絶対誤差と  $F_c(z) \geq F_r(z)$ の相対誤差は境界  $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 上で最大値をとることが解析関数の 最大値の定理を適用して容易に示される<sup>11)</sup>.

6. 数 值 例

例1 問題の領域 D は半径の異なる3つの円の外部:

$$|z - z_{l0}| > \rho_l, \quad \rho_1 = 1, \ \rho_2 = 0.5, \ \rho_3 = 1.5$$
  
 $z_{l0} = 2 \exp \frac{2(l-1)\pi i}{2} \quad (l = 1, 2, 3)$ 

である.拘束点と電荷点は

$$z_{lj} = z_{l0} + \rho_l \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N},$$
  

$$\zeta_{lj} = z_{l0} + q\rho_l \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N},$$
  

$$(j = 1, 2, \dots, N; \ l = 1, 2, 3)$$

と配置する.ここに,0 < q < 1 は電荷配置のパラ メータである.解析解は知られていないので,誤差の 指標として

$$E_{Rel} = \max_{1 \le j \le N} |\operatorname{Re} F_u(z_{lj+1/2}) - U_l|,$$
  

$$E_{Ul} = |U_l - U_{ld}|,$$
  

$$E_{Iml} = \max_{1 \le j \le N} |\operatorname{Im} F_v(z_{lj+1/2}) - V_l|,$$
  

$$E_{Vl} = |V_l - V_{ld}|,$$
  

$$E_{Ml} = \max_{1 \le j \le N} ||F_c(z_{lj+1/2})| - R_l|,$$
  

$$E_{Rl} = |R_l - R_{ld}|,$$
  

$$E_{Al} = \max_{1 \le j \le N} |\operatorname{arg} F_r(z_{lj+1/2}) - \Theta_l|,$$
  

$$E_{\Theta l} = |\Theta_l - \Theta_{ld}| \quad (l = 1, 2, 3)$$

を用いる.ここに, $z_{lj+1/2}$ は $C_l$ 上の拘束点 $z_{lj}$ と $z_{lj+1}$ の中間点であり, $U_{ld}$ , $V_{ld}$ , $R_{ld}$ , $\Theta_{ld}$ は電荷数を倍増した計算値である.

図 2 と表 1 に計算結果を示す.スリットの位置  $U_l$ ,  $V_l$ ,  $R_l$ ,  $\Theta_l$  は  $U_l - U_{ld}$ ,  $V_l - V_{ld}$ ,  $R_l - R_{ld}$ ,  $\Theta_l - \Theta_{ld}$ に零以外の数字が現れる桁までの値である.また, cond は連立 1 次方程式の  $L_1$ 条件数である.解析解との直 接的な比較はできないが,近似写像関数の精度は十分 に高いと考えられる.

図3は流れの複素ポテンシャルの虚部

- (a)  $\operatorname{Im}(-\mathrm{i}F_u(z)) = -\operatorname{Re}F_u(z),$
- (b)  $\text{Im}(F_v(z)) = \text{Im} F_v(z)$ ,
- (c)  $\operatorname{Im}(-i \log F_c(z)) = -\log |F_c(z)|,$
- (d)  $\operatorname{Im}(\log F_r(z)) = \arg F_r(z)$

の等高線である.これらは一様な平行流中に障害物 が置かれた場合,原点に位置する渦点または湧き出し (吸い込み)点の周囲に障害物が置かれた場合の2次元 ポテンシャル流の流線を与える.このとき,C<sub>1</sub>,C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>が円柱形の障害物の輪郭線に対応している.

表1 例1の計算精度

Table 1 Numerical results of  $F_u(z)$ ,  $F_v(z)$ ,  $F_c(z)$  and  $F_r(z)$  for the exterior of three disks (Example 1, cond = 4.7 × 10<sup>4</sup> for N = 64, a = 0.8)

$conu = 4.1 \times 10^{-101} \text{ for } 10 = 04, \ q = 0.0).$						
	$E_{Rel}$	$E_{Ul}$	$U_l$			
$C_1$	$7.1 \times 10^{-8}$	$2.0 \times 10^{-8}$	1.32203175			
$C_2$	$2.2 \times 10^{-8}$	$4.9 \times 10^{-9}$	-0.787052952			
$C_3$	$1.2 \times 10^{-7}$	$9.7 \times 10^{-9}$	-0.697257057			
	$E_{Iml}$	$E_{Vl}$	$V_l$			
$C_1$	$5.0 \times 10^{-8}$	$1.0 \times 10^{-8}$	-0.326576607			
$C_2$	$3.0 \times 10^{-8}$	$1.7 \times 10^{-8}$	0.99641470			
$C_3$	$8.1 \times 10^{-8}$	$7.7 \times 10^{-9}$	-1.478338666			
	$E_{Ml}$	$E_{Rl}$	$R_l$			
$C_1$	$2.1 \times 10^{-7}$	$1.8 \times 10^{-8}$	2.69585239			
$C_2$	$3.9 \times 10^{-8}$	$2.3 \times 10^{-8}$	2.91217882			
$C_3$	$8.6 \times 10^{-5}$	$6.2 \times 10^{-9}$	2.265373689			
	$E_{Al}$	$E_{\Theta l}$	$\Theta_l$			
$C_1$	$6.7 \times 10^{-8}$	$1.3 \times 10^{-8}$	-0.23582973			
$C_2$	$2.1 \times 10^{-8}$	$8.5 \times 10^{-9}$	2.246730504			
$C_3$	$2.5 \times 10^{-5}$	$4.9 \times 10^{-9}$	-2.005025898			



Fig. 2 Numerical conformal mappings (a)  $F_u(z)$ , (b)  $F_v(z)$ , (c)  $F_c(z)$  and (d)  $F_r(z)$  of the exterior of three disks (Example 1).



図 3 障害物の周囲の基本的なポテンシャル流

Fig. 3 Contour lines of (a)  $-\operatorname{Re} F_u(z)$ , (b)  $\operatorname{Im} F_v(z)$ , (c)  $-\log |F_c(z)|$  and (d) arg  $F_r(z)$ , i.e., streamlines of the basic potential flows around cylindrical objects.

7. ポテンシャル流解析への応用

数値等角写像を典型的なポテンシャル流の問題に応 用する.

- 例2問題の領域 Dは単一円の外部:
- $|z z_0| > 1$   $(z_0 = 2 + 2i)$

である.拘束点と電荷点は

$$z_j = z_0 + \exp{rac{2(j-1)\pi i}{N}},$$
  
 $\zeta_j = z_0 + q \exp{rac{2(j-1)\pi i}{N}},$   
 $(j = 1, 2, ..., N)$ 

と配置する.解析解は

$$f_u(z) = z - \frac{1}{z - z_0}, \quad u = \operatorname{Re} z_0,$$
  

$$f_v(z) = z + \frac{1}{z - z_0}, \quad v = \operatorname{Im} z_0,$$
  

$$f_c(z) = \frac{z(z - z_0)}{z - (z_0 - 1/\overline{z}_0)}, \quad r = |z_0|,$$
  

$$f_r(z) = \frac{z(z - (z_0 - 1/\overline{z}_0))}{z - z_0}, \quad \theta = \arg z_0$$

である.ここに, *z*<sub>0</sub> は *z*<sub>0</sub> の共役複素数である.この 問題では解析解との比較

$$\begin{split} E_F &= \max_{1 \leq j \leq N} \{ |F(z_j) - f(z_j)|, \\ & |F(z_{j+1/2}) - f(z_{j+1/2})| \}, \\ E_U &= |U - u|, \quad E_V = |V - v|, \\ E_R &= |R - r|, \quad E_\Theta = |\Theta - \theta| \end{split}$$

による誤差の評価が可能である.

表2に計算結果を示す.円形境界は代用電荷法の得 意な問題ではあるが,近似写像関数の精度は非常に高 い.図4は流れの複素ポテンシャル

(a)  $\cos \theta F_v(z) - i \sin \theta F_u(z)$  ( $\theta = \pi/4$ ), (b)  $\cos \theta \log F_r(z) - i \sin \theta \log F_c(z)$  ( $\theta = \pi/4$ ), (c)  $pF_v(z) - i(1-p) \log F_c(z)$  (p = 0.5), (d)  $pF_v(z) + (1-p) \log F_r(z)$  (p = 0.5), (e)  $-ip \log F_c(z) + i(1-p) \log F_{2c}(z)$  (p = 0.2), (f)  $p \log F_r(z) - (1-p) \log F_{2r}(z)$  (p = 0.2) の虚部の等高線である.ここに, $\theta \ge p$  は重ね合わせ の相対的な強さに対応するパラメータである.これら は円柱形の障害物の周囲の(a)  $\theta$  方向の一様流,(b) 反時計方向の湧き出し渦流,(c) 反時計方向の渦をと もなう一様流,(d) 湧き出しをともなう一様流,(e) 反 時計方向と時計方向の2つの渦流,(f) 湧き出しと吸 い込み流,の流線を与える.特に,(e) と(f) は新たな 正規化条件 F(4+4i) = 0 による近似写像関数  $F_{2c}(z)$  $\ge F_{2r}(z)$  を用いている.しかし,この場合にも解く

#### 表 2 例 2 の計算精度

Table 2 Numerical results of  $F_u(z)$ ,  $F_v(z)$ ,  $F_c(z)$  and  $F_r(z)$  for the exterior of a disk (Example 2, q = 0.5).

N	$E_{Fu}$	$E_{Fv}$	$E_{Fc}$	$E_{Fr}$	cond
17	$4.7 \times 10^{-06}$	$4.6 \times 10^{-06}$	$2.3 \times 10^{-04}$	$6.3 \times 10^{-05}$	$1.8 \times 10^{03}$
33	$3.6 \times 10^{-11}$	$3.6 \times 10^{-11}$	$3.2 \times 10^{-08}$	$8.7 \times 10^{-09}$	$8.1 \times 10^{05}$
65	$1.7 \times 10^{-14}$	$1.7 \times 10^{-14}$	$4.6 \times 10^{-14}$	$2.9\times10^{-14}$	$9.7 \times 10^{10}$
	$E_U$	$E_V$	$E_R$	$E_{\Theta}$	
17	$6.9 \times 10^{-13}$	$1.3 \times 10^{-13}$	$2.5 \times 10^{-09}$	$8.8 \times 10^{-10}$	
33	$8.9 \times 10^{-16}$	0.	$1.3 \times 10^{-15}$	$2.2 \times 10^{-16}$	
65	0.	$4.4 \times 10^{-16}$	$1.3 \times 10^{-15}$	$2.2 \times 10^{-16}$	





basic flows around a cylindrical object.

べき連立1次方程式の係数行列は不変である.

8. おわりに

非有界な多重連結領域から,平行スリット領域,円 弧スリット領域,放射スリット領域への等角写像につ いては,応用上の重要性にもかかわらず,精度と効率 の良い数値計算法が知られていなかった.我々はこれ らの等角写像の問題に対して統一的な計算法を提案し, その有効性を数値実験的に検証した.円のほかにも, 楕円,Cassiniの橙形,正方形を境界曲線とする典型 的な領域に対して数値実験を行って,境界上に凹型の 角点が存在しなければ高い精度が得られることを確認 している.なお,このような領域に対する簡単で比較 的適用範囲の広い電荷配置の方法が文献5)に記され ている.

この方法は,曲線境界の問題に有効であり,原理と 計算が簡単で精度が高いだけでなく,さらに次のよう な著しい特徴を備えている.

- 平行スリット領域,円弧スリット領域,放射スリット領域への近似写像関数を同じ係数行列の連立1次方程式を解いて求めることができる.したがって,N<sup>3</sup>の計算量を要するLU分解は1度行えばよい.
- 近似写像関数は座標のスケール変換に対して自然 な不変性を示す。
- 実軸と角度 θ をなす平行スリット領域への近似写 像関数は

 $F_{\theta}(z) = e^{i\theta} (\cos\theta F_v(z) - i\sin\theta F_u(z))$ 

で得られる.したがって, θごとに連立1次方程 式を解く必要はない.

円弧スリット領域と放射スリット領域の問題で解くべき連立1次方程式の係数行列は正規化点の位置に依存しない。

これらの性質はポテンシャル流解析の方法としての次のような特徴を与えている.

様々な流れを重ね合わせで実現することができる.
 このとき,渦点や湧き出し(吸い込み)点の強さ,
 一様流の向きや強さは重ね合わせのパラメータで
 容易に変更可能である.また,渦点や湧き出し(吸い込み)点の追加や位置の変更に際しても解くべき連立1次方程式の係数行列は不変である.

なお,近似写像関数の導関数が解析的に求まることも 応用上重要である.たとえば,Newton法を適用して 淀み点が容易に計算できる.

今日,計算機の進歩・普及と社会の情報化の中で,

数値計算は成熟した研究分野であると思われがちであ る.しかし,応用上重要で解の存在や一意性は証明さ れていても,計算機の援用なしには具体的な解を求め ることが困難な問題は少なくない.このような問題に 対する数値計算法の開発は,日進月歩の科学技術の底 辺を支える基盤技術として,情報処理という視点から も依然重要である.

謝辞 この研究は文部省科学研究費補助金,平成 4,6,8年度一般研究(C)(04640238,06640317, 08640292),平成 9~11 年度基盤研究(B)(2) (09440081)等の補助を受けた.

# 参考文献

- (1) 天野 要:代用電荷法に基づく等角写像の数値計 算法,情報処理学会論文誌,Vol.28,No.7,pp.697-704 (1987).
- 2) 天野 要:代用電荷法に基づく外部等角写像の 数値計算法,情報処理学会論文誌,Vol.29,No.1, pp.62-72 (1988).
- 3) 天野 要:代用電荷法に基づく2重連結領域等角 写像の数値計算法,情報処理学会論文誌, Vol.29, No.10, pp.914-924 (1988).
- 4) 天野 要:代用電荷法に基づく双方向的な数値等 角写像の方法,情報処理,Vol.31,No.5,pp.623-632 (1990).
- 5) 天野 要:代用電荷法に基づく数値等角写像の 誤差の性質,情報処理学会論文誌, Vol.32, No.1, pp.1-10 (1991).
- Amano, K.: A Charge Simulation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, J. Comput. Appl. Math., Vol.53, No.3, pp.353–370 (1994).
- 7) 天野 要:円弧スリット領域への数値等角写像の 方法,情報処理学会論文誌,Vol.36,No.2,pp.219-225 (1995).
- 8) 天野 要:代用電荷法による放射スリット領域 への数値等角写像の方法,日本応用数理学会論文 誌, Vol.5, No.3, pp.267-280 (1995).
- (9) 天野 要,渋谷良彦,土江雅之,杉原正顯:代用 電荷法による平行スリット領域への数値等角写像 の方法,日本応用数理学会論文誌,Vol.6,No.4, pp.353-371 (1996).
- 10) 天野 要,井上哲男:代用電荷法による数値等 角写像のスケール変換不変性,日本応用数理学会 論文誌, Vol.8, No.1, pp.1–17 (1998).
- Amano, K.: A Charge Simulation Method for Numerical Conformal Mapping onto Circular and Radial Slit Domains, SIAM J. Sci. Comput., Vol.19, No.4, pp.1169–1187 (1998).
- 12) Amano, K., Okano, D., Shimohira, H. and Sugihara, M.: Numerical Conformal Mapping

onto Parallel, Circular and Radial Slit domains, Advances in Numerical Mathematics (Proc. 4th Japan-China Joint Seminar on Numerical Mathematics, Kawarada, H., Nakamura, M. and Shi, Z. (Eds.)), Mathematical Sciences and Applications, Vol.12, pp.1–10, Gakkōtosho (1999).

- 13) Amano, K., Okano, D., Shimohira, H., Okamoto, T. and Igaue, Y.: Potential Flow Analysis by the Numerical Conformal Mapping, *Information*, Vol.3, No.1, pp.73–88 (2000).
- 14) 天野 要, 岡野 大,緒方秀教:代用電荷法による円弧スリット単位円板領域への数値等角写像の方法,情報処理学会論文誌, Vol.41, No.4, pp.998–1008 (2000).
- 15) Gaier, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung, Springer, Berlin (1964).
- 16) Hayes, J.K., Kahaner, D.K. and Kellner, R.G.: An Improved Method for Numerical Conformal Mapping, *Math., Comput.*, Vol.26, No.118, pp.327–334 (1972).
- Henrici, P.: Applied and Computational Complex Analysis, Vol.1, John Wiley & Sons, New York (1974).
- 18) Henrici, P.: Applied and Computational Complex Analysis, Vol.3, John Wiley & Sons, New York (1986).
- 19) Hough, D.M. and Papamichael, N.: The Use of Splines and Singular Functions in an Integral Equation Method for Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol.37, pp.133–147 (1981).
- 20) Hough, D.M. and Papamichael, N.: An Integral Equation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol.41, pp.287–307 (1983).
- 21) 今井 功: 複素解析と流体力学,日本評論社,東 京 (1989).
- 22) Katsurada, M. and Okamoto, H.: A Mathematical Study of the Charge Simulation method I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.IA, Math., Vol.35, No.3, pp.507–518 (1988).
- 23) Kythe, P.K.: Computational Conformal Mapping, Birkhäuser, Boston (1998).
- 24) 村島定行:代用電荷法とその応用,森北出版,東 京 (1983).
- 25) 室田一雄:代用電荷法におけるスキームの「不 変性」について,情報処理学会論文誌, Vol.34, No.3, pp.533–535 (1993).
- 26) Nehari, Z.: Conformal Mapping, McGraw-Hill, New York (1952); Dover, New York (1975).
- 27) 岡本 久,桂田祐史:ポテンシャル問題の高速

解法,応用数理,Vol.2, No.3, pp.2–20 (1992).

- 28) Symm, G.T.: An Integral Equation Method in Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol.9, pp.250–258 (1966).
- 29) Symm, G.T.: Numerical Mapping of Exterior Domains, Numer. Math., Vol.10, pp.437–445 (1967).
- 30) Symm, G.T.: Conformal Mapping of Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol.13, pp.448–457 (1969).
- 31) Trefethen, L.N. (Ed.): Numerical Conformal Mapping, North-Holland, Amsterdam (1986); reprinted from J. Comput. Appl. Math, Vol.14, No.1-2 (1986).

(平成 12 年 5 月 9 日受付)(平成 12 年 9 月 27 日採録)



# 天野 要(正会員) 1948年生.1971年京都大学工学 部電子工学科卒業.1978年北海道

中電了工学科牛菜 1978 牛北海道 大学大学院工学研究科博士課程電気 工学専攻修了 .工学博士 .現在 ,愛 媛大学工学部情報工学科教授 ,総合

情報処理センター長.研究分野は数値解析,情報数学, 情報科学.情報処理学会創立30周年記念論文賞,日本 応用数理学会1996年度論文賞受賞.日本数学会,日 本応用数理学会,電子情報通信学会,日本心理学会, SIAM,ACM 各会員.



岡野 大(正会員)

1968年生.1992年東京大学工学 部物理工学科卒業.1995年東京大 学大学院工学系研究科修士課程物理 工学専攻修了.修士(工学).現在, 愛媛大学工学部情報工学科助手.研

究分野は数値解析.日本応用数理学会会員.



緒方 秀教(正会員)

1967年生.1990年東京大学工学 部物理工学科卒業.1992年東京大 学大学院工学系研究科修士課程物理 工学専攻修了.博士(工学).現在, 愛媛大学工学部情報工学科講師.研

究分野は数値解析.日本応用数理学会 1998 年度論文 賞受賞.日本応用数理学会会員.



#### 下平 博巳

1974年生.1997年愛媛大学工学 部情報工学科卒業.1999年愛媛大 学大学院理工学研究科博士前期課程 情報工学専攻修了.修士(工学).現 在,NTTコミュニケーションウェア

株式会社勤務.



#### 杉原 正顯(正会員)

1954 年生.1977 年東京大学工学 部計数工学科卒業.1982 年東京大 学大学院工学系研究科博士課程計数 工学専攻修了.工学博士.現在,名 古屋大学大学院工学研究科計算理工

学専攻教授 . 研究分野は数値解析 . 日本応用数理学会 1998 年度論文賞受賞 . 日本数学会 , 日本応用数理学 会各会員 .