7F－5

非単調論理においてレート・歪定理を実現する公理拡張規則

高橋祥兼
ＮＴＴ情報通信処理研究所

1．まえがき

現在の非単調論理の基本問題の一つは、非単調論理の情報理論的な定式化、およびその論理学的定式化との関係の明確化である。非単調論理の情報理論的なアプローチによる研究としては、ｴﾝﾄﾛﾋﾟｰ最大推論[1]や確率的意味論[2]等があるが、未だ模索段階にある。本稿では、文献(1)のｴﾝﾄﾛﾋﾟｰ最大推論の考え方を情報量の観点から発展させ、非単調論理において情報理論のﾚｰﾄ･歪定理を実現する公理拡張規則が、論理学的に極小な拡張公理を生成することを示すことにより、非単調論理の情報理論的アプローチと論理学的アプローチの基盤を確立する。

2．非単調理論の構成

非単調理論の全体構成を*図1*に示し、主要な構成要素と動作を以下に説明する。

(1)世界モデルとその表現

非単調論理を用いて真理値を論ずる対象世界をΩとし、Ωによって充足される仮想的かつ理想的な一階述語理論をT=〈F,Σ,I〉とする。ここで、Fは一階言語=(記号,論理式)、Σは公理集合=(論理的公理,特殊公理Λ)、Iは演繹推論規則(分離規則,一般化規則)である。

(2)非単調理論の定義

非単調理論N(Γ)は、Tに次の不完全化および非定式化の手順を施して得られる理論〈T､Δ,(Γ,H)〉である。

(a)Tの不完全化　Tの特殊公理Λ（以下、単に公理と呼称）を次の２つに分離する。

①確定公理Δ　確定公理Δとは、Ωから十分な情報が取得されているため、Ωによって充足されることが確定している論理式δ∈Λの集合のことである。δをﾃﾞｰﾀとも呼ぶ。

②未定公理Δ'　未定公理Δ'とは、Ωから得られているﾃﾞｰﾀΔからだけでは真理値が不明な論理式x∈Λの集合のことである。

(b)Tの非定式化　全世界Θに関する経験や学習によって得られる手順、方法等の知識γの集合Γで、Γ∪Δなる情報が、Δ'の各論理式xに一意な真理値を付与するΓを**公理拡張規則**と呼び、Tに公理拡張規則Γを追加する。Γは一般的には定式表現が困難であるが、定式表現されているΓの典型例としては、ﾃﾞﾌｫﾙﾄﾙｰﾙ（一階述語論理式）と極小限定ﾙｰﾙ（二階述語論理式）がある。Γによって真理値を付与されたx∈Δ'の集合を、**Γに基づく仮説H**と呼ぶ。

Φ={Γ}とする。TとΔを固定した場合、非単調理論は(Γ,H)の数=#(Φ)だけ有り得る。

(3)非単調理論における回答の導出

非単調理論における質問への回答導出は次の2ﾌｪｰｽﾞを経て行われる。

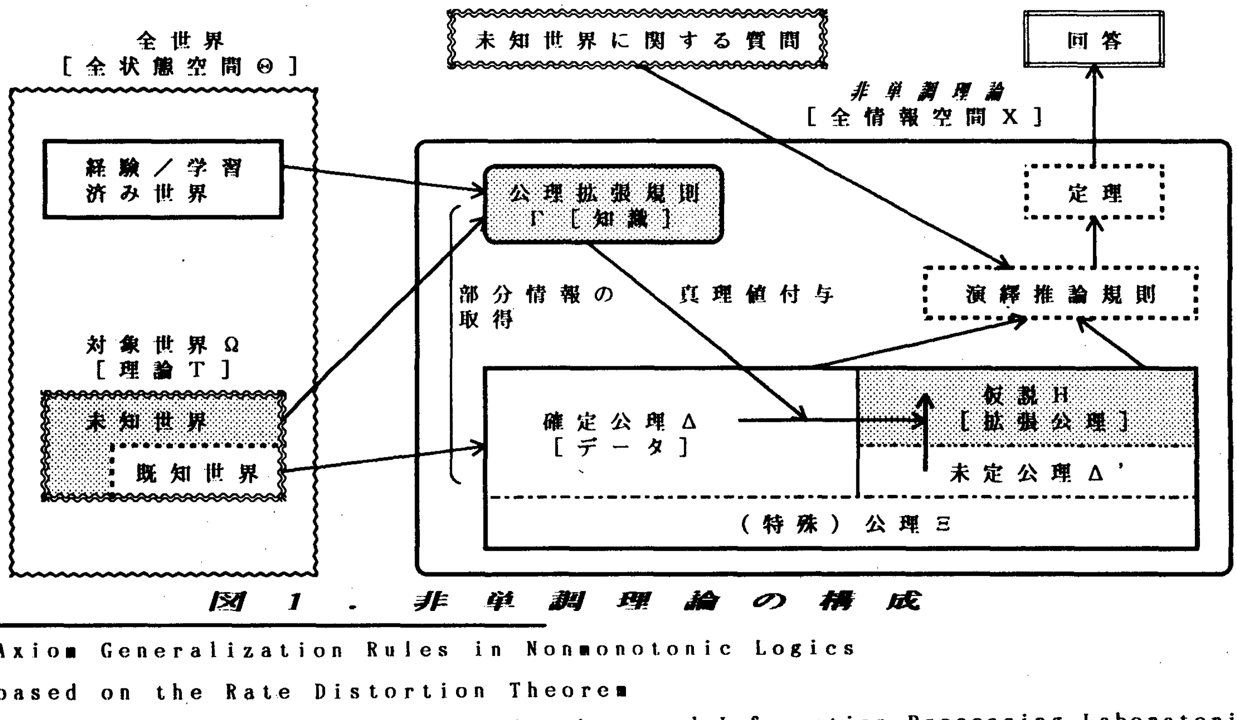

図１．非単調理論の構成

Axiom Generalization Rules in Nonmonotonic Logics based on the Rate Distortion Theorem
Yoshikane TAKAHASHI, NTT Communications and Information Processing Laboratories

① 確定公理Δと公理拡張規則Γとから、仮説Hを導出する。このﾌｪｰｽﾞは、ΔまたはΓを変更した場合に一度行えば良い。

② 確定公理Δと仮説H、および演繹推論規則とから質問の回答に相当する定理を導出する。このﾌｪｰｽﾞは、基本的には従来の述語理論の場合と同様であり、質問ごとに実行する必要がある。

3.ﾚｰﾄ･歪定理を実現する公理拡張規則

(1)ﾚｰﾄ･歪定理

情報理論におけるﾚｰﾄ･歪定理は、「状態空間Ωと情報空間Ξの間の許容歪DとレートR（相互情報量の最小値）の関係は、ﾚｰﾄ･歪関数R=R(D)で与えられる。」である[3]。

(2)公理拡張規則の相互情報量と歪

理論Tにおける未定公理Δ'の表現を$\Theta_0=\{\theta\}$とし、非単調理論へのθに関する質問の発生確率を$\{P(\theta)\}$とする。また、VおよびV[Γ]を、各々、TおよびN(Γ)におけるΔ'の真理値割当関数とする。このとき、情報空間X_0を{x: θに対応する仮説、すなわちV[Γ](x)=0または1}とし、公理拡張規則Γを、X_0からΓが定める仮説Hを選択する条件付き確率行列$(Q(x|\theta))$によって表現する。$\Phi=\{\Gamma\}$と{Q}は1対1に対応する。さらに、Θ_0とX_0の間の歪測度ρを、$\rho(\theta,x)=0$ ($x\neq\theta$の場合)、$\rho(\theta,x)=V(\theta)-V[\Gamma](x)$ ($x=\theta$の場合)とする。

これらの概念を用いて、Γの相互情報量I(Γ)と歪d(Γ)を、情報理論におけるΘ_0とX_0の間の相互情報量I(Q)と歪d(Q)として次のように定義する。

$$I(\Gamma)=I(Q)=\sum_{\theta}\sum_{x}P(\theta)Q(x|\theta)\log\frac{Q(x|\theta)}{\sum_{\theta}P(\theta)Q(x|\theta)}$$

$$d(\Gamma)=d(Q)=\sum_{\theta}\sum_{x}P(\theta)Q(x|\theta)\rho(\theta,x)$$

(3)ﾚｰﾄ･歪定理を実現する公理拡張規則

任意に与えられた許容歪D≧0に対して、$\Phi(D)=\{\Gamma\in\Phi : d(\Gamma)\leq D\}$、$\Psi(D)=\{H(D):\Gamma\in\Phi(D)$が生成する仮説$\}$とおく。このとき、ﾚｰﾄ･歪定理を用いて、Φ(D)、Ψ(D)の中から相互情報量が最小な公理拡張規則$\Gamma_0(D)$と仮説$H_0(D)$を選択する。

(4)Γ_0の論理学的極小性

一階述語論理の拡張によって定式化される従来の非単調論理（極小限定等）における公理拡張規則Γ_mは、殆どD=0の場合を対象としており、しかも次の論理学的極小条件を満たす拡張公理H_m（論理学的極小元と呼称）を生成する[4][5]。

[極小条件]

① $\{\phi\,|\,\Delta\vdash\phi\}\subset\Lambda_m$

② $\{\phi\,|\,\Omega\vdash\phi\}\subset\forall\Lambda$に対して、$\Lambda_m\subset\Lambda$である。

③ $H_m=\Lambda_m-(\Lambda_m$の定理$)-\Delta$

ここで、この極小条件に係わる非単調論理の性質を、情報理論と論理学の立場からより一般化する次の定理が成立する。

> ***[定理]***
>
> ***(1)*** $D_1\leq D_2$ならば、$\#[H_0(D_1)]\geq\#[H_0(D_2)]$である。但し、$\#[H_0(D)]$は$V[\Gamma_0(D)](x)=1$なる公理$x\in H_0(D)$の数を表す。
>
> ***(2)*** Φ(D)の中の論理学的極小元$\Gamma_m(D)$は$\Gamma_0(D)$と一致する。

[証明] ***(1)*** $D_1\leq D_2$ならば、$I(\Gamma_0(D_1))\geq I(\Gamma_0(D_2))$である。また、一般に、$I(\Gamma(D_1))\geq I(\Gamma(D_2))$ならば、$\#[H(D_1)]\geq\#[H(D_2)]$であるから、$\#[H_0(D_1)]\geq\#[H_0(D_2)]$が成立する。

(2) Φ(D)の中の論理学的極小元$\Gamma_m(D)$は、#[H(D)]の最小値を与える。また、$\forall H^{(1)}(D)$、$H^{(2)}(D)\in\Psi(D)$に対して、$\#[H^{(1)}(D)]\geq\#[H^{(2)}(D)]\rightleftarrows I(\Gamma^{(1)}(D))\geq I(\Gamma^{(2)}(D))$である。従って、$\Gamma_m(D)=\Gamma_0(D)$が成立する。

[証明終]

4．むすび

許容歪を満たす範囲内で相互情報量を最小にする、と言う意味で情報理論的に最良な公理拡張規則が、非単調論理の論理学的定式化として典型的な極小拡張公理を定めていることを示した。特に、極小限定ﾙｰﾙは、許容歪D=0である場合のﾚｰﾄ･歪定理を実現する一つの具体的な公理拡張規則として位置づけられる。さらに、様相論理を拡張して構成された自省論理（=デホルト論理）に対しても、本稿で示した定理と同様の定理が成立することが容易に証明できる。

今後の課題は、ﾚｰﾄ･歪定理を実現する公理拡張規則$\Gamma_0(D)$を論理学的な規則を用いて具体的に特徴づけること、並びに$\Gamma_0(D)$が含む知識の量を情報理論的に定量化し、最小限の知識量をもつ$\Gamma_0(D)$を求めることである。

文　献

(1) Goldszmidt,et al.: "A maximum entropy approach to nonmonotonic reasoning", Proc. AAAI (1990)

(2) 佐藤:「矛盾を契機とする非単調推論の確率的意味について」､人工知能学会研資SIG-FAI-9001 (1990)

(3) 有本:「現代情報理論」､ｺﾛﾅ社 (1978)

(4) J.McCarthy: "Circumscription - A form of non-monotonic reasoning", AI 13 (1980)

(5) Y.Shoham: "Nonmonotonic logics: Meaning and utility", Proc. IJCAI (1987)