n－Queen問題の高速解法の比較

3E－4

清水　秀夫　　林　彬
金沢工業大学

1．はじめに

我々は先にn－Queen問題を解くための高速なアルゴリズムを発表した[1]。今回、他に発表されている高速アルゴリズム[2][3]の追試を行ない我々の方法との比較を行なった。

2．n－Queen問題

n－Queen問題とは、n×nの盤上にn個のQueenが互いに取られないような配置を求める問題である。この問題は組合せ最適化問題としてとらえることができ、その制約条件は、次の通りである。

・制約条件a)：
盤の各行各列にQueenは1つ存在する。
・制約条件b)：
盤の各右上がり、各右下がり方向にQueenは1つ以下存在する。

3．高速アルゴリズムとその比較

今回比較の対象とした高速アルゴリズムは、以下の3つである。

①ボルツマンマシンを使ったもの[2]。
②グラフの最大独立点集合を求めるアルゴリズムを応用したもの[3]。
③我々が開発した①を元に状態空間の削減を行なったアルゴリズム。

これらのアルゴリズムは全て以下の手続きに従っていると考えられ、異なっているのは状態の表現方法、状態遷移の規則、状態を遷移するかどうかの判定法である：

```
procedure queen(n)
  state←初期状態
while  Energy(state)＞0 do
  t←次の状態の候補;
  ΔE←Energy(state)－Energy(t);
  if judge(ΔE) then state←t;
od.
```

ここで、Energy(·)は制約条件をあらわすコスト関数、judge(·)はコストの増減を元に状態を遷移するかどうかを判定するための関数である。

以下に、上にあげたアルゴリズムの差異を検討する。

アルゴリズム①：盤面の各ます目に1個の2値ニューロンを各々対応させている。状態空間の大きさは2^{n^2}である。状態遷移はランダムに選んだ1つのニューロンに関して行なう。コスト関数は制約条件a)とb)の両方に関するもので4項ある。判定関数は

$$\Pr\{judge(x)=1\}=\frac{1}{1+\exp(-x/T)}$$

である。Tは温度と呼ばれるアニーリングのパラメータで、極の緩和を行なうためにある。普通は最初温度を高くしておいて徐々に下げる。ボルツマンマシンの実行時間は温度スケジュールによって決るが、今回は速度重視ということでT＝0と固定した。

アルゴリズム②：各列におけるQueenの行位置をリストとして持っている。状態空間の大きさはn！である。状態遷移は列の交換という形で行なうが、どの列を交換するかは確定的に行なう。今回は、n個の中から2個

Comparison of some Fast Algorithms for Solving the n-Queen Problem
Hideo Shimizu and Akira Hayashi
Kanazawa Institute of Technology

取る組合せを、辞書式順序で発生している。コスト関数は原論文では、n個のQueenの張る部分グラフの(辺の数)−(頂点の数)という形になっているが、これは制約条件b)に対応する。これに伴い、while文の条件判定は−nと比較することになる。判定関数は

$$\mathrm{judge}(x)=\begin{cases}1 & x\leqq 0\text{のとき}\\ 0 & x>0\text{のとき}\end{cases}$$

である。

アルゴリズム③：我々のアルゴリズムも②と同様に、各列におけるQueenの行位置をリストとして持っており、状態遷移はランダムに選んだ2列の交換という形で行なう。これはn−Queen問題の特性として、既に制約条件a)を満足している状態で列を交換しても制約条件a)を満足したままであることを利用したものである。こうすることによって状態空間の大きさが①に比べて削減できn!になる。これは②と同時期に独立に発見されたものである。コスト関数は①の制約条件b)に対応するものだけを用いており、2項ですむ。判定関数は

$$\Pr\{\mathrm{judge}(x)=1\}=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

である。

4．実験結果

さまざまなnについて、3つのアルゴリズムの実行時間を測定してみた(図1)。使用機種は、IBM3090 S200である。①と③は確率アルゴリズムなので乱数系列によって実行時間が変化するため、複数回実行した平均を取っている。①の初期値は各ニューロンを0.5の確率で1にセットしたものであり、②③の初期値はランダムな列の交換を3n回行なった乱順列である。②③では初期状態のエネルギーは、ほぼ2n／3であった。

グラフから、①と②はほぼ同じ勾配で増加するが、②の方が約100倍速いことが分かる。また、n<100では③より②の方が速いが、それ以降は③の方が速くなる。

グラフは両対数グラフであり、ほぼ直線なので多項式時間アルゴリズムと考えられる。図1から計算時間を見ると①②はほぼO(n^2)③はO(n)であることが分る。今回はメモリの都合で③に関してはn＝20万までの実行となったがSun4上で100万−Queenの解が、約10000秒で見つかっている。

5．まとめ

我々のアルゴリズムでは状態遷移規則を列の交換という形に変更し、状態空間を削減している。これに伴いコスト関数も簡単化でき高速化が図れた。また、従来のアルゴリズムより高速であることが実験により確かめられた。

【参考文献】

[1]清水，林，"n−Queen問題の高速解法"，信学技報COMP90-39，pp.79-86(1990)
[2]秋山，梶浦，"ボルツマンマシンとNクイーン問題"，bit，vol.22，No.3，pp.340-341(1990)
[3]山田，富田，高橋，"非探索アルゴリズムによるn_queen問題の解法"，信学技報COMP90-10，pp.87-92(1990)

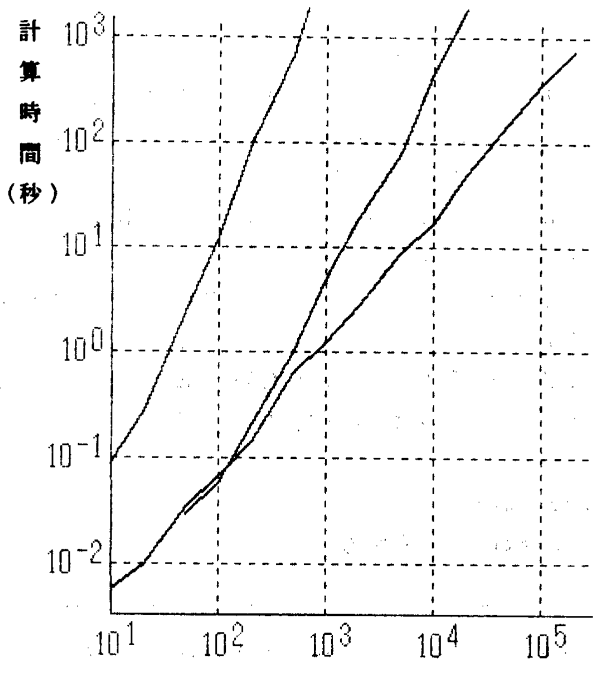

図1　アルゴリズム①②③の実行時間