5B−1

グラフをf辺彩色する近似アルゴリズム

中野眞一　藤井秀彦　西関隆夫
(東北大学工学部)

1. まえがき

本文では自己ループはないが多重辺(並列辺)はありうる多重グラフ $G=(V,E)$ を扱い，単にグラフと呼ぶ．ここで V は G の点集合であり，E は辺集合である．$d(v)$ は点 $v\in V$ の次数，$E(vw)$ は点 v と w を結ぶ多重辺の集合，$p(vw)=|E(vw)|$ はその多重度を表す．$\Delta=\max_{v\in V}d(v)$ とする．**点容量関数** f は V から自然数への任意の関数とする．$\Delta_f=\max_{v\in V}\lceil d(v)/f(v)\rceil$ とする．このとき任意の点 $v\in V$ に接続している同じ色の辺は高々 $f(v)$ 本しかないようにグラフ G のすべての辺を彩色することをグラフ G の **f彩色**と呼ぶ．従来の辺彩色はすべての点 $v\in V$ について $f(v)=1$ なる場合の f彩色に過ぎない．

グラフ G を f彩色するのに必要な最小の色数を G の **f彩色指数**といい，$\chi'_f(G)$ と書くことにする．グラフ G の通常の辺彩色に必要な最小の色数，いわゆる彩色指数 $\chi'(G)$ を求める問題は NP 困難であるので[4]，$\chi'_f(G)$ を求める問題も一般には NP 困難であり，$\chi'_f(G)$ を決定する効率のよいアルゴリズムはありそうにない[1]．

$\chi'_f(G)$ の上界として

$$\chi'_f(G)\le\max_{v,w\in V}\left\lceil\frac{d(v)+p(vw)}{f(v)}\right\rceil$$

が知られている[3]．これは通常の辺彩色に関する Vizing の定理[7]の一般化になっている．またグラフを上の上界が保証した個数の色を用いて f彩色する $O(|E|^2)$ 時間アルゴリズムが上界の証明より得られる．本論文ではグラフを上の上界が保証した個数の色を用いて f彩色する $O(|E|\Delta_f\log|E|)$ 時間アルゴリズムおよび $O(|E|\sqrt{|E|\log|E|})$ 時間アルゴリズムを与える．2つのアルゴリズムの記憶領域は $O(|V|\Delta_f+|E|)$ である．単純グラフを高々 $\Delta+1$ 色で辺彩色する $O(|E|\Delta\log|V|)$ 時間アルゴリズムおよび $O(|E|\sqrt{|V|\log|V|})$ 時間アルゴリズムが知られている[2]．2つのアルゴリズムの記憶領域は $O(|E|)$ である．本論文のアルゴリズムはこれを f彩色に応用できるように工夫したものである．

2. 準備

本章ではまず用語の定義を与えてから，交互歩道のスイッチと扇のシフトという f彩色の手法について説明する．

$v,w\in V$ のとき vw は v と w を結ぶ1本の辺を表す．

$$u(G)=\max_{v,w\in V}\left\lceil\frac{d(v)+p(vw)}{f(v)}\right\rceil$$

とする．本文のアルゴリズムはグラフ G を高々 $u(G)$ 個の色で f彩色する．$u(G)$ 個の色の集合を Q とする．色 $\alpha\in Q$ で塗られている辺を α辺を呼ぶ．点 v に接続している α辺の本数を $d(v,\alpha)$ と書く．点 $v\in V$ の色 $\alpha\in Q$ に関する**余裕** $m(v,\alpha)$ を

$$m(v,\alpha)=f(v)-d(v,\alpha)$$

と定める．

グラフ G が f彩色されているとき，任意の点 $v\in V$ および色 $\alpha\in Q$ について $m(v,\alpha)\ge 0$ である．$m(v,\alpha)\ge 1$ のとき点 v で色 α は**余裕色**であるという．点 v の余裕色の集合を $M(v)$ とする．すなわち $M(v)=\{\alpha\in Q|m(v,\alpha)\ge 1\}$ とする．

グラフ G の歩道 W とは $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots v_{k-1}e_kv_k$ の形をした辺点列である．但し各 i について $e_i\in E(v_{i-1}v_i)$ とし，W に同じ点は2度以上現れるかもしれないが，同じ辺は2度以上現れないものとする．v_0 を W の始点といい v_k を終点という．$v_0=v_k$ なる歩道を閉路という．W に含まれる辺数を $|W|$ と表わし，W の長さと呼ぶ．相異なる色 $\alpha,\beta\in Q$ で交互に塗られた歩道 W のすべての α辺を β で塗り，すべての β辺を α で塗ることを W をスイッチするという．W をスイッチしても f彩色のままであるように **$\alpha\beta$交互歩道** W を次の様に定義する．

(a) W の辺は色 α と β で交互に塗られている．奇数番めの辺 e_i は β辺であり，偶数番めの辺 e_i は α辺である．

(b) (始点条件) $v_0\ne v_k$ のとき $m(v_0,\alpha)\ge 1$ である．$v_0=v_k$ かつ $|W|=k$ が奇数のとき $m(v_0,\alpha)\ge 2$ である．

(c) (終点条件) $v_k\ne v_0$ かつ $|W|$ が偶数のとき $m(v_k,\beta)\ge 1$ である．$v_k\ne v_0$ かつ $|W|$ が奇数のとき $m(v_k,\alpha)\ge 1$ である．

α,β で交互に塗られた偶数長の閉路は全て $\alpha\beta$交互歩道であることに注意しよう．v_0 を始点とする $\alpha\beta$交互歩道で偶数長の閉路でないものの一つを $W(\alpha,\beta,v_0)$ と書くことにする．$W(\alpha,\beta,v_0)$ をスイッチすると点の余裕は始点と終点のみで変化することに注意しよう．$m(v_0,\alpha)\ge 1$ かつ $m(v_0,\beta)=0$ のとき少なくとも一つは $W(\alpha,\beta,v_0)$ が存在することがわかる．

次に扇を定義する．辺 $e_0=wv_0$ を未彩色辺とする．点 w に接続する相異なる辺の列 $F=e_0e_1\cdots e_k$ を扇と呼ぶ．ただし次の条件(a)-(c)を満足する色の列 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots\alpha_k$ が存在するものとする．なお辺 e_i の w でない端点を v_i とする．v_i を葉点，w を中心点とよぶ．

(a) $0\le i\le k$ なる各 i について $\alpha_i\in M(v_i)$ である．

(b) $1\le i\le k$ なる各 i について辺 e_i は色 α_{i-1} で塗られている．

(c) 色 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots\alpha_{k-1}$ は相異なる．

点 $v_0,v_1,v_2,\cdots v_k$ は相異なるとは限らないことに注意しよう．$0\le i\le k-1$ なる各辺 e_i を新たに色 α_i で塗り，辺 e_k を未彩色にすることを扇 F をシフトするという．条件(a)-(c)により扇をシフトしても f彩色は壊れない．

極大扇 F を以下のように作る．まず1本の未彩色辺 $e_0=wv_0$ は扇である．$m(w,\alpha)\ge 1$ なる色 α を選ぶ．もし $m(w,\alpha)\ge 2$ ならばここで扇 F の構成を終了する．いま一般に扇 $e_0e_1e_2\cdots e_k$ が作られたとする．色列を $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k$ とする．

$m(w,\alpha_k)+m(v_k,\alpha_k)\ge 2$ ならばここで扇 F の構成を終了する．また $m(v_k,\alpha)\ge 1$ ならばここで扇 F の構成を終了する．($\alpha_k=\alpha$ と選び直す．) そうでないとき，補題1より α_k は次の(a)-(c)を満足するように選べる．

(a) $m(v_k,\alpha_k)=1$

(b) $m(w,\alpha_k)=0$

(c) $v_i=v_k$ なる各 $0\le i\le k-1$ に対し $\alpha_k\ne\alpha_i$

もし α_k が $\alpha_0,\alpha_1,\cdots\alpha_{k-1}$ のいずれかと同じならば，扇 F の構成を終了する．

もしそうでないならば，w に接続する α_k辺 $e_{k+1}\in E(wv_{k+1})$ を付け加えて $m(v_{k+1},\alpha_{k+1})\ge 1$ なる色 $\alpha_{k+1}\in Q$ を選び扇 F の構成を続ける．

以上のようにして作られた極大扇を $F=e_0e_1e_2\cdots e_k$ とすると，次の場合1-4のいずれかが成立している．

場合1: $m(w,\alpha_k)\ge 1$ かつ $m(v_k,\alpha_k)\ge 1$ のとき．

場合2: $m(w,\alpha)\ge 2$ のとき．

場合3: $m(v_k,\alpha_k)\ge 2$ のとき．

場合4: $m(v_k,\alpha_k)=1$ かつ $m(w,\alpha_k)=0$ であり，ある $t(0\le t\le k-1)$ について $\alpha_k=\alpha_t$ であるとき．

また中心点 w の余裕色 α と最終の葉点 v_k の余裕色 α_k によりこの扇を $\alpha\alpha_k$扇とよぶ．

3. アルゴリズム COLOR

アルゴリズム COLOR は任意のグラフ G を高々 $u(G)$ 色使用して $O(|E|^2)$ 計算時間，$O(|V|\Delta_f+|E|)$ 記憶領域で f彩色する．

東北大学工学部情報工学科，仙台市
Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai-shi 980

```
Procedure COLOR(G)
begin
   while  G に未彩色辺 vw が存在する do
      RECOLOR(vw)
end
Procedure RECOLOR(wv0)
begin {F =e0(= wv0)e1e2 ··· ek は極大扇とする．F の色列を
  α0, α1, α2 ··· αk とする．α ∈ M(w) とし F は ααk 扇とする }
   if  場合 1
   then begin
      F をシフトする．
      ek を αk で塗る．
   end
   elseif  場合 2
   then begin
      W(α, αk, w) をスイッチする．
      if  W が v0 で終っていなかった
      then   e0 を αk で塗る．
      else   e0 を α で塗る．
   end
   elseif  場合 3
   then begin
      F をシフトする．
      W(αk, α, vk) をスイッチする．
      if  W が w で終っていなかった
      then   ek を α で塗る．
      else   ek を αk で塗る．
   end
   elseif  場合 4
   then begin { ある t(0 ≤ t ≤ k − 1) について αt = αk とする．
     }
      if  W(αk, α, vk) は w および vt で終了しない．
      then  W(αk, α, vk) をスイッチし，F をシフトし，ek を α
        で塗る．
      else if  W(αk, α, vk) が vt で終了する．
      then  W(αk, α, vk) をスイッチし，部分扇 F' = e0e1 ··· et
        をシフトし，et を α で塗る．
      else  { W(αk, α, vk) が w で終了する．}
      then  w で終了しない W(αk, α, vt) が存在し，これをス
        イッチし，部分扇 F' = e0e1 ··· et をシフトし，et を α で
        塗る．
   end
end
```

場合 4 の $W(\alpha_k, \alpha, v_k)$ は次の 2 つの条件を満足するように選ぶ．もし α 辺 uv_{t+1}, $u \in V$ が選ばれたら，次に α_k 辺 $v_{t+1}w$ を選び W を終了する．もし α 辺 uw, $u \in V$ が選ばれたら，次に α_k 辺 wv_{t+1} 以外の α_k 辺を選び W の構成を続ける．

4. アルゴリズム PARALLEL-COLOR

本章では任意のグラフ G を高々 $u(G)$ 色で f 彩色するアルゴリズム PARALLEL-COLOR を示す．このアルゴリズムの計算時間は $O(|E|\Delta_f \log|E|)$，記憶領域は $O(|V|\Delta_f + |E|)$ である．

```
Procedure  PARALLEL-COLOR(G)
begin
 1. while  未彩色辺がある  do
   2. for  各色 α ∈ Q   do
      begin  {3–8 は α ステージ}
        3. 両端点が α 余裕である極大本数の未彩色辺を色 α で塗る
        4. TWO-COLOR(α)
        5. MAKE-S(α)
        6. PRESUBSTAGE(α)
        7. for  β ≠ α なる各色  β ∈ Q   do
           8. SUBSTAGE(αβ)
      end
end
```

アルゴリズムの詳細略

5. アルゴリズム EULER-COLOR

本章では任意のグラフ G を高々 $u(G)$ 色で f 彩色するアルゴリズム EULER-COLOR を示す．このアルゴリズムの計算時間は $O(|E|\sqrt{|E|\log|E|})$，計算領域は $O(|V|\Delta_f + |E|)$ である．

$G = (V, E)$ からオイラー分割を使ってつぎのように 2 つの部分グラフ $G_a = (V_a, E_a)$，$G_b = (V_b, E_b)$ をつくる手続きを EULER-P と呼ぶ．

まず $V_a = V_b = V$ とする．G に多重辺対がある限り除去し，G_a と G_b に 1 本ずつ加える．こうしてできた単純グラフを G' とする．次に G' の辺集合を互いに辺素な歩道に分割する．ただしどの閉路も他の歩道と交差せず，奇数次数の点は丁度 1 つの歩道の端点になるようにする．最後に各歩道の辺を交互に G_a, G_b に加える．このとき $u(G_1) + u(G_2) \le u(G) + 3$ となる．

任意のグラフ G を高々 $u(G)$ 色で f 彩色するアルゴリズム EULER-COLOR を示す．定数 $C = \log\Delta_f\sqrt{(\log|E|)/|E|}$ とする．

```
Procedure  EULER-COLOR(G)
begin
 1. if  G は EULER-COLOR により C 回以上分割された
 2. then  PARALLEL-COLOR(G)
    else begin
     3. EULER-P(G)  {Ga と Gb に G を分割する }
     4. EULER-COLOR(Ga)
     5. EULER-COLOR(Gb)
     6. if  G は u(G) 以上の色を使っている．
     7. then  辺数が最小の色を選び，その色で塗られている辺
          をすべて未彩色辺にする．G の使用する色が高々 u(G)
          個になるまで (高々 3 回) これを繰返す．
     8. while  G に未彩色辺 vw が存在する do
        9. RECOLOR(vw)
end
```

6. あとがき

本論文ではグラフ G を高々 $u(G)$ 個数の色を用いて f 彩色する $O(|E|\Delta_f \log|E|)$ 時間アルゴリズムおよび $O(|E|\sqrt{|E|\log|E|})$ 時間アルゴリズムを与えた．2 つのアルゴリズムの記憶領域は $O(|V|\Delta_f + |E|)$ である．

今後さらに f 彩色アルゴリズムを高速化することが期待される．また高速並列アルゴリズムの研究も望まれる．

グラフの f 彩色は更に fg 彩色に拡張されている[(6)]．本アルゴリズムをさらに拡張し，グラフの fg 彩色に応用できることが予想される．

7. 文献

文献

(1) A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman: "The Design and Analysis of Computer Algorithms," Addison-Wesley, Reading, MA. (1974).

(2) H. N. Gabow, T. Nishizeki, O. Kariv, D. Leven and O.Terada: "Algorithms for Edge-Coloring Graphs," TECHNICAL REPORT (1985).

(3) S. L. Hakimi and O. Kariv: "On a generalization of edge-coloring in graphs", Journal of Graph Theory, 10, pp.139-154 (1986).

(4) I. J. Holyer: "The NP-completeness of edge colourings," SIAM J. Comput., 10, pp.718-720 (1980).

(5) S. Nakano, T. Nishizeki and N. Saito "On the f-coloring of multigraphs," IEEE Trans. Circuit and Syst., CAS-35, 3, pp.345-353 (1988).

(6) 中野, 西関, 斎藤: "グラフの fg 辺彩色数の上界", 信学論 (A), J70-A, 10, pp.1463-1471 (昭 62-10).

(7) V. G. Vizing: "The chromatic class of a multigraph," Kibernetica(Kief), 3, pp.29-39 (1965); Cybernatics, 3, pp.32-41 (1965).