# 代数方程式に対する Durand-Kerner 法の初期値について

4B−5

小嶋 卓、池谷 尚紀、植松 俊晃
(静岡大学 工学部)

## 1 まえがき

代数方程式の標準的な数値解法である Durand-Kerner 法 (以下 DK 法と呼ぶ) は、Aberth の初期値を使うのが一般的になっている。しかし、この方法での全根を含む円は次数が高くなるにつれ半径が大きくなりすぎ、結果として収束までの反復回数が多くなってしまうことが指摘されている。この解決法の1つとして中田らによって、Schur-Cohn の定理を用いた全根を含む最小な円を求める方法 (1) が提案されている。また、桜井らによって初期値依存性の少ない解法 (2) の開発も進展している。

一方、我々は指数部 32 ビットで非数にも対応したパッケージを作成したことで、Graeffe 法などが比較的自由に使える環境 (3) になった。この Graeffe 法を用いることによって、全根を含む最小な円を、Schur-Cohn の定理を用いる方法に比べ約 1/2 の時間で求まることがわかった。

## 2 Aberth の初期値と Schur-Cohn の定理による決定法

Schur-Cohn の定理とは、多項式の零点が全て単位円内にあるための必要十分条件を述べたものである。中田らのこの定理を用いた決定法 (1) はこの条件を利用し、半径を正規化しながら2分法で全根を含む最小の円を求めている。

例として Chebyshev の数値積分公式の分点を根とする方程式 (以下 Chebyshev の数値積分公式の方程式と呼ぶ) における初期半径と、近似根が収束するまでのDK反復の反復回数を表に示す。表1が従来の Aberth の初期値によるもので、表2は Schur-Cohn の定理によるものである。この場合、収束判定基準は1ステップ前の近似根との差が $10^{-10}$ とした。また円周上への初期値の配置については、x 軸に最も近い初期値の偏角が $\theta = 3/2n$ が一般的だが、代数方程式の定数項が正の時は $\theta = 3/4n$、負の時は $\theta = 3 * 3/4n$ とした。

この表を見て分かるように、高次になるにつれ、Schur-Cohn の定理を用いたものの効果が現われる。例えば 20 次では、Schur-Cohn の定理を用いた初期半径は Aberth の初期半径の半分以下になり、DK 反復の回数もそれに比して半分程度になっている。さらに高次になれば、その差は広がっていく。

図1, 2には、表1, 2にある 20 次の Chebyshev の数値積分公式の方程式における DK 法の収束状況を示す。図1が Aberth の初期値によるもので、図2が Schur-Cohn の定理による初期値によるものである。(図1, 2の半径が大きく異なることに注意) なお、問題の方程式の係数は GNU のC++の有理数計算で求め、その後、通常の倍精度型に落としてから計算を始めた。

| 次数 | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|
| 半径 | 1.458 | 2.126 | 2.631 | 3.053 |
| 反復回数 | 9 | 17 | 26 | 35 |

表 1. Aberth の初期値
(半径の大きさとDK法の反復回数)

| 次数 | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|
| 半径 | 0.917 | 0.955 | 0.971 | 0.996 |
| 反復回数 | 7 | 9 | 11 | 15 |

表 2. Schur-Cohn の定理による初期値
(半径の大きさとDK法の反復回数)

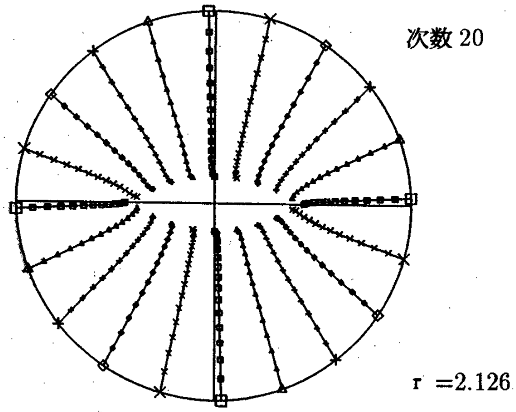


図 1. Aberth の初期値を用いたDK反復法の収束状況

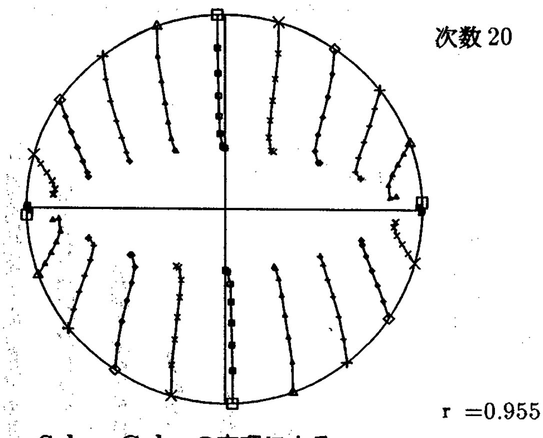


図 2. Schur-Cohn の定理による初期値を用いたDK反復法の収束状況

Choosing the initial approximations in the Durand-Kerner method for solving algebraic equations
Takashi KOJIMA, Naoki IKEYA, Toshiaki UEMATSU
Shizuoka University

## 3 Graeffe 法による高速化

Graeffe 法とは、「 根を2乗する方法 」とも呼ばれ古くからある方法であり、元の根を2乗した値を根にもつ方程式を生成し、次々に2乗, 4乗, 8乗, … を根とする方程式を生成していく。そうすると、根の比が極端に拡大し、根と係数の関係から元の方程式の根が推定できるようになる。この方法は、反復解法ではあるが、係数だけから計算を始めるので、近次根に対する初期値の設定の良否の問題が生じない。この方法と Schur-Cohn の定理による方法との演算量の概算（プログラム中で、ループの最も内側に含まれる部分）は、表3に示すとおりである。なお、参考のため、DK 法の1反復あたりの乗除算の回数の概算も示しておく。

| | |
|---|---|
| Schur-Cohn による方法 | $\sim \frac{1}{2}n^2$ |
| Graeffe 法による方法 | $\sim \frac{1}{4}n^2$ |
| (参考) DK 法の1反復 | $\sim 3n^2$ |

表 3．演算量の比較
（1反復あたりの乗除算の回数の概算）

この表でわかるように、Graeffe 法は Schur-Cohn の定理による方法に比べ、理論的には演算量が半分程度で済む。

Graeffe 法の計算過程では、オーバーフローやアンダーフローが起こることが予想されるので、先ず、指数部32ビットの新しい型ですべての計算を行なってみた。すると、計算時間は Schur-Cohn の定理による方法とほぼ同等か、それより少し遅い程度であった。

そこで、計算前に係数の正規化を行なってから通常の倍精度で計算し、オーバーフローやアンダーフローをしそうになったら指数部32ビットの新しい型での計算に移行する方針とした。

以上の方法と Schur-Cohn の定理による方法の初期値を求めるまでの時間を示したものが図3、4である。

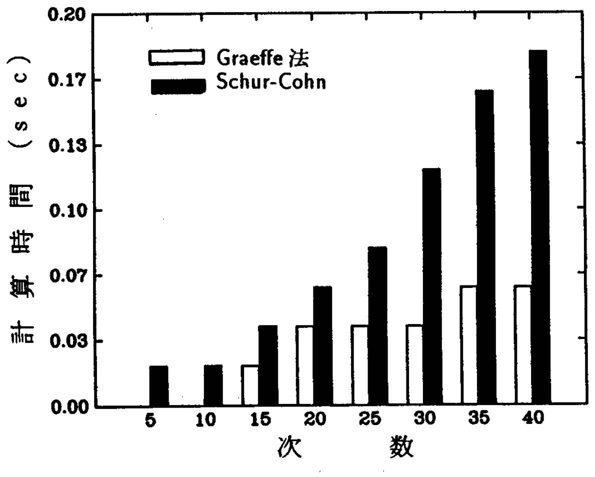


図 3． 計算時間の比較 （a）
（Chebyshev の数値積分公式の方程式）

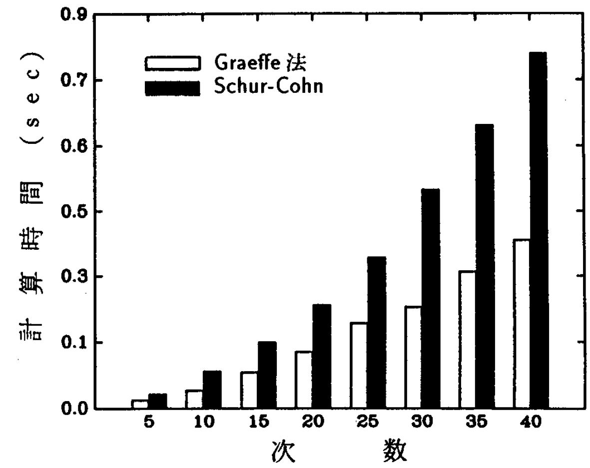


図 4． 計算時間の比較 （b）
（乱数によって生成された根をもつ方程式 16組の平均）

図3は Chebyshev の数値積分公式の方程式、図4は乱数によって生成された、複素平面上で、実部が [-10,10]、虚部が [-10,10] に分布する根をもつ方程式（16組の平均）を用いたものである。なお、半径を求めるときの収束精度は、$10^{-2}$ とした。

図3、4の例は、sun3/260 上の GNU C++ の環境下で測定した。横軸は方程式の次数であり、縦軸は半径を求めるまでの計算時間（単位は秒）である。

## 4 まとめ

以上述べたように、Graeffe 法を用いれば、DK 法の初期値の半径を Schur-Cohn の定理を用いる方法に比べて、約1/2で計算できる。初期値を求める時間が半分になったのは良いことであるが、DK 法全体の演算時間の向上についても検討する必要がある。

中田らはさらに、手間のかかる最小二乗法的に最適な半径を使うことを提案しているが、追試の結果、あまり効果を示さない問題や、最初に設定した円の外へ大きく飛び出す場合もあり、これについては別の手法によってDK 法全体の高速化を計るのが望ましいと思われる。

### 参考文献

(1) 中田、川本、名取
代数方程式に対する Durand-Kerner 法の初期値の改良
情報処理学会論文誌 vol.29 No.12 p1200〜 1207 (1988)
(2) 櫻井、鳥居、杉浦
高次収束する代数方程式の全根同時反復解法
情報処理学会論文誌 vol.31 No.7 p964〜 969 (1990)
(3) 小嶋
指数部 32bit の浮動小数点演算パッケージ
第19回 数値解析シンポジューム講演予稿集
p89〜 92 (1990)