

4B-2

数値等角写像における
代用電荷法と積分方程式法の比較

日野 究 天野 要

愛媛大学 工学部

1. はじめに Riemann の写像定理によれば, z 平面上に与えられた Jordan 曲線 C で囲まれた Jordan 領域 D は w 平面上の単位円の内部 $|w| < 1$ に等角写像することができる. この写像関数 $w=f(z)$ は, D の内部に原点をとれば, 正規化条件 $f(0)=0, f'(0)>0$ の下に一意的に定まり,

$$f(z)=ze^{g(z)+ih(z)}, \quad z \in D \quad (1)$$

で与えられる. ここに, $g(z)$ と $h(z)$ は D で共役な調和関数で, C が単位円に移るという境界条件と正規化条件から, それぞれ,

$$g(z)=-\log|z|, \quad z \in C \quad (2)$$

$$h(0)=0 \quad (3)$$

を満たさなければならない. さらに, Carathéodory の定理により, $f(z)$ は境界をも含む閉領域 $\bar{D}=D+C$ を $|w| \leq 1$ に 1 対 1, 連続に写像する.

このような与えられた領域から標準領域への数値等角写像の方法としては, 問題を第 1 種 Fredholm 型の積分方程式に帰着させた Symm の方法¹⁾, それを改良した Hayes 他²⁾, Hough & Papamichael の方法³⁾ (それぞれ S66, HKK72, HP81 と略記) が著名である. これに対して, 最近, Laplace 方程式の簡潔かつ高精度な近似解法として知られている代用電荷法に基づく方法⁴⁾ (A91 と略記) が提案されている. しかし, これらの直接的な比較研究はまだ行われていない. ここでは, A91 と S66 を計算機上に実現し, それらを HKK72 と HP81 の条件に合わせて実行させるという形式で, 代用電荷法と積分方程式法の計算精度を数値実験的に比較する.

2. 積分方程式法と代用電荷法 積分方程式法では, 上記の共役な調和関数 $g(z)$ と $h(z)$ を境界上の 1 重層対数ポテンシャルで

$$g(z)=-\int_C \log|z-\zeta| \sigma(\zeta) |d\zeta|, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} h(z) &= -\int_C \arg(z-\zeta) \sigma(\zeta) |d\zeta| + \theta_0 \\ &= -\int_C \arg(1-z/\zeta) \sigma(\zeta) |d\zeta| \end{aligned} \quad (5)$$

と表現する. ここに,

$$\theta_0 = \int_C \arg(-\zeta) \sigma(\zeta) |d\zeta| \quad (6)$$

は正規化条件(3) から定まる回転の定数である. 境界上の未知量である密度関数 $\sigma(\zeta)$, $\zeta \in C$ は, 境界条件(2) から, 第 1 種 Fredholm 型積分方程式

$$\int_C \log|z-\zeta| \sigma(\zeta) |d\zeta| = \log|z|, \quad z \in C \quad (7)$$

の解として得られる.

S66 は, 境界 C を区間 $I_1, I_2, \dots, I_N$ に N 分割し, 密度関数を $\sigma(\zeta)=\sigma_i, \zeta \in I_i$ なる階段関数で近似した. 境界上の N 点 $z_j \in I_j$ で境界条件を課して, 連立 1 次方程式

$$\sum_i \left(\int_{I_i} \log|z_j-\zeta| |d\zeta| \right) \sigma_i = \log|z_j| \quad (8)$$

が得られる. これを解いて σ_i が求まれば, 問題の等角写像の近似写像関数

$$W=F(z)=ze^{G(z)+iH(z)}, \quad z \in \bar{D}, \quad (9)$$

$$G(z)=-\sum_i \left(\int_{I_i} \log|z-\zeta| |d\zeta| \right) \sigma_i, \quad (10)$$

$$H(z)=-\sum_i \left(\int_{I_i} \arg(z-\zeta) |d\zeta| \right) \sigma_i \quad (11)$$

を得ることができる. 境界上では特異積分が必要であることを注意する.

HKK72 は密度関数 $\sigma(\zeta)$ を $N/2$ 個の区分的な 2 次多項式で近似したものである. また, HP81 は $\sigma(\zeta)$ の近似にスプライン関数と角点の特異性を反映した特異関数を導入したものである.

これに対して, 代用電荷法では, $g(z)$ と $h(z)$ を領域 $\bar{D}$ の外部に配置された N 個の電荷点 ζ_i を極とする複素対数ポテンシャルの 1 次結合で近似して, 近似写像関数

$$W=F(z)=ze^{G(z)+iH(z)}, \quad z \in \bar{D} \quad (12)$$

$$G(z)=-\sum_i Q_i \log|z-\zeta_i| \quad (13)$$

$$H(z)=-\sum_i Q_i \arg(z-\zeta_i) + \theta_0$$

$$= -\sum Q_i \arg(1 - z/\zeta_i) \quad (14)$$

$$\theta_0 = \sum Q_i \arg(-\zeta_i) \quad (15)$$

を得ることができる。未定係数である電荷 Q_i は境界上の N 個の拘束点 z_j で境界条件(2)を満たすように定められる。すなわち、 Q_i は拘束条件と呼ばれる連立1次方程式

$$\sum Q_i \log|z_j - \zeta_i| = \log|z_j| \quad (16)$$

の解である。数値積分は不要である。

3. 数値実験 図1に、Cassini の楕形の一例（愛媛大学情報処理センターの FACOM-M360 AP システムによる倍精度計算）を示す。

領域 $\{(x+1)^2 + y^2\} \{(x-1)^2 + y^2\} = a^4$, $a=1.06$

写像関数 $w=f(z)=az/(a^4-1+z^2)^{1/2}$

拘束点 (a) $|z_j - z_{j-1}| = L/N$, $L = \oint_C |dz|$

$$z_1 = ((a^2 + 1)^{1/2}, 0)$$

$$(b) z_j = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$r = \{\cos 2\theta + (\cos^2 2\theta + a^4 - 1)^{1/2}\}^{1/2}$$

$$\theta = 2\pi(j-1)/N, \quad N=64$$

代用電荷法の電荷点

$$\zeta_i = z_i + \frac{1}{2} r_a |z_{i+1} - z_{i-1}| e^{i\{\arg(z_{i+1} - z_{i-1}) - \pi/2\}}$$

代用電荷法では、正則関数の最大値の原理により、

$$E_F(z) \leq E_F \leq E_M + E_A \approx 2E_M$$

$$E_F(z) = |F(z) - f(z)|, \quad E_F = \max_C E_F(z)$$

$$E_M = \max_C |F(z)| - 1 \approx \max_j |F(z_{j+1/2})| - 1$$

$$E_A = \max_C |\arg F(z) - \arg f(z)|$$

という簡潔な誤差の評価式を用いることができる。この関係は積分方程式法の場合にも概ね成立している。

4. おわりに 偏心円、楕円、Cassini の楕形、正方形、L型矩形等の数値実験から得られた主な結論は次のとおりである。

(a) 滑らかな円に近い形の領域に対しては、代用電荷法が優れている。

(b) 偏平な領域や凹形の領域に対しても、拘束点と電荷点の配置を調節すれば、代用電荷法で HKK72 の積分方程式法と同等以上の精度を得ることができる。

(c) しかし、代用電荷法の精度が拘束点や電荷点の配置といった計算条件に強く依存しているのに比較して、積分方程式法の精度は安定している。

(d) 境界上に角点（特異点）が存在する場合にも、凸型であれば、代用電荷法で HP81 に匹敵する高い精

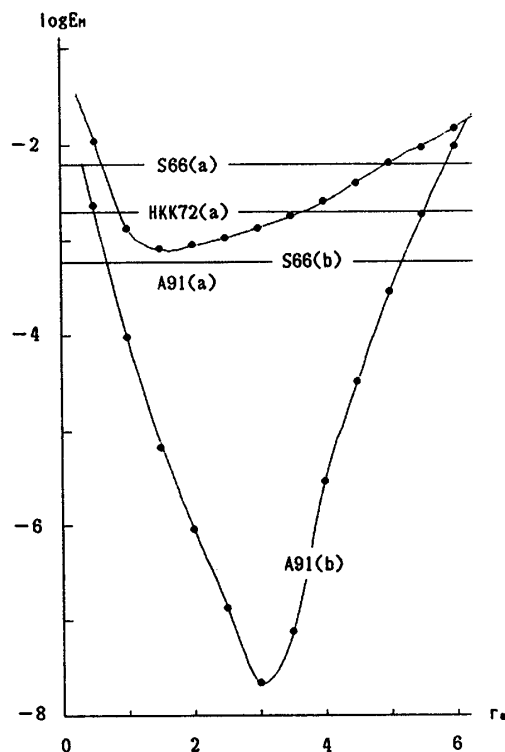


図1 計算精度 (Cassini の楕形)

度を得ることができる。

(e) しかし、凹型の角点に対して高い精度を得るためには、HP81 のような高次要素に特異関数を組み合わせた積分方程式法を用いる必要がある。

参考文献

- 1) Symm, G. T.: An Integral Equation Method in Conformal Mapping, Numer. Math., Vol. 9, pp. 250-258 (1966).
- 2) Hayes, J. K., Kahaner, D. K. and Kellner, R. G.: An Improved Method for Numerical Conformal Mapping, Math. Comput., Vol. 26, No. 118, pp. 327-334 (1972).
- 3) Hough, D. M. and Papamichael, N.: The Use of Splines and Singular Functions in an Integral Equation Method for Conformal Mapping, Numer. Math., Vol. 37, pp. 133-147 (1981).
- 4) 天野 要: 代用電荷法に基づく数値等角写像の誤差の性質, 情報処理学会論文誌, Vol. 32, No. 1, (1991, 掲載予定)。