2L−2

幾何学的制約緩和問題への コネクショニスト・アプローチ（２）

金　那美[1]　　高井　昌彰[2]　　國井　利泰[1]
1 東京大学理学部
2 北海道大学工学部

1．はじめに

幾何学的な制約は、一般に高次の連立方程式で表され、しかも不十分な形で与えられることが多い。したがって、幾何学的制約問題を解くことは、非常に難しくなる。本論文では、幾何学的制約問題をコネクショニズムの立場から考察する。

2．幾何学的制約緩和問題

描画(picture description) 方式には、手続き的方法と、宣言的方法がある。図１は、正三角形ＡＢＣを指定するこの２つの方法を示している [1]。手続き的方法は描き方のアルゴリズムを与えているが、宣言的方法では完成された図形が満たすべき制約－幾何学的制約－を単純に列べただけである。一般にユーザが図形を描く場合、最初に考えることは“描き方”ではない。その図形の持つ“性質”である。したがって、ユーザ・インターフェイスの立場から見れば、制約による宣言的方法は、セマンティック・ギャップが少ない優れた方式である。

しかし、一般ユーザが必要十分な制約を与えることは困難である。ときには制約の間に矛盾が生じるかもしれない。そのため、機械製図等で厳密解を求める描画システムの研究[3][4]とは独立に、データの図表化やレイアウトの問題における相反する制約もそこそこに解けるような制約緩和システムの研究がなされてきた[2][6]。

相反する制約を解く一般的方法としては、線形の制約の場合には最小自乗法、非線形の制約の場合にはNewton-Raphson 法が知られている[2]。線形の場合には適切な解をユニークに求めることができるが、非線形の場合では計算時間が長くなり、局所的な最適解に陥ることもある。非線形の制約を解くことが難しいのは、正にこの点にある。しかし、幾何学的な制約において、非線形性が果たす役割は極めて大きい。例えば等距離性ＡＢ＝ＣＤは次の２次式で表される。

$$(xa-xb)^2+(ya-yb)^2 = (xc-xd)^2+(yc-yd)^2$$

A:(xa,ya), B(xb,yb), C(xc,yc), D(xd,yd)

幾何学的制約緩和問題では、非線形性は逃れられない本質的問題である。

3．コネクショニズムの導入

人間は図形を描くときに、そのイメージを容易に思い描くことができる。その際、頭の中である程度の幾何学的制約が（非線形なものも含めて）無意識のうちに解かれているものと考えられる。もしそうならば、コネクショニズムは幾何学的制約問題解決のための有効な手段となり得ることが期待できる。そこで、我々は最適化機械として拡張されたボルツマン・マシン[5] を利用し、幾何学的制約緩和問題を解くことを試みる。

3．1．線形制約の場合

線形の制約（例えば２点を通る直線の水平性）は、一般にベクトルの内積の形で表現される。

$$a1x1 + a2x2 + \cdots + amxm = k$$

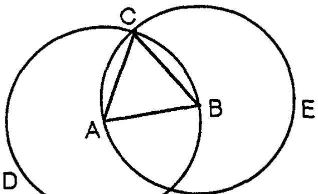
ai,k：定数、　xi：座標値

ここで座標値をｎビットの２進数で表せば、この制約は次のエネルギー関数を最小にするボルツマン・マシンで容易に解くことができる。

$$E = \left(\sum_{i=1}^{m} ai\left(\sum_{j=1}^{n} 2^{j-1}Uij\right) - k\right)^2 \qquad (1)$$

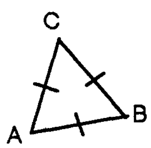
$Uij \in \{0,1\}$：ユニットの状態、　$xi = \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1}Uij$

Ａ：（０、０）、Ｂ：（５、３）とする
Ａを中心として半径ＡＢの円Ｄを描く
Ｂを中心として半径ＡＢの円Ｅを描く
ＤとＥの上側の交点をＣとする



（ａ）手続き的方法

Ａ、Ｂを固定する
ＡＢ＝ＢＣ＝ＣＡである



（ｂ）宣言的方法

図１．正三角形ＡＢＣの描画方式

A Connectionist Approach to Geometrical Constraint-Solving (2)
Nami KIN[1], Yoshiaki TAKAI[2], Tosiyasu L. KUNII[1]
1 The University of Tokyo, 2 Hokkaido University

明らかに(1)式はUijの２次式である。

いくつかの制約を連立させるときには、各制約のエネルギーの線形結合を考えればよい。

$$E = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_r E_r$$

但し、λ_i は各制約の強度を示す定数である。

一般に、線形の制約の場合には、関係する座標値がｍ個、各座標値がｎビットで表せるとき、ｍｎ個のユニットをもつボルツマン・マシンで解くことができる。図２にｍ＝２、ｎ＝３のときのネットワークを示す。

３．２．非線形制約の場合

非線形の場合には、最小化する評価関数にユニット状態 Uijの３次以上の項が現れるため、通常のボルツマン・マシンは適用できない。そこで、[5] において非線形の制約を解くことが可能な拡張されたボルツマン・マシンを考案した。例えば、ＡＢ＝５（線分ＡＢの長さは５）という制約を解くには、２点Ａ、ＢのＸ、Ｙ座標をそれぞれ２進数で表現し、次の拡張されたエネルギー関数を最小にするネットワークを考えればよい。

$$E = (\sum_i 2^{i-1}(U1i-U3i))^2+(\sum_i 2^{i-1}(U2i-U4i))^2-5^2)^2$$

$$A:(xa,ya),\quad B:(xb,yb)$$

$$xa = \sum_i 2^{i-1}U1i,\quad ya = \sum_i 2^{i-1}U2i$$

$$xb = \sum_i 2^{i-1}U3i,\quad yb = \sum_i 2^{i-1}U4i$$

Uij：自由ユニットの状態

このネットワークを用いれば、任意の線分ＡＢを初期状態として与え、状態遷移を繰り返すことで、長さ５の線分（位置は不定）に収束させることができる。したがって、本方式を用いれば、図１（ｂ）に示されるような制約を解く、すなわち、任意の三角形のトポロジーだけを与え、これを正三角形に変換することが可能となる。

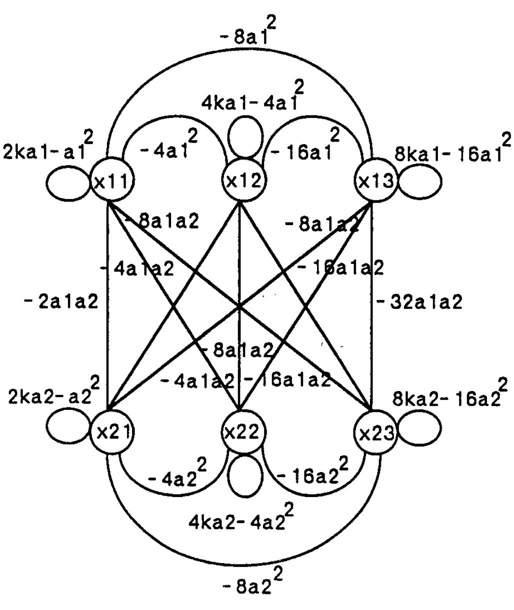


図２．a1x1 + a2x2 = k を解くネットワーク

一方、実際上の問題点としては、準ユニットの爆発的増大がある。上の例ではエネルギー関数Ｅが Uijの４次式となるから、２次の準ユニットと３次の準ユニットが必要になる。座標値が８ビットで表されているとすると、自由ユニットの数ｎは32個である。これに対し、２次の準ユニットは 32Ｃ2＝496 個、３次では 32Ｃ3＝4960個となり、$O(n^3)$で増加する。

４．これからのアプローチ

コネクショニズムは、個々のユニットの機能を単純にした分、必然的に多くのユニットとそれらの複雑な結合を必要とする。上例のようにユニットの数が増大すると、現在のフォン・ノイマン型計算機でシミュレートするには限界がある。コネクショニズムが真の力を発揮するには、アルゴリズムをそのまま実現する並列分散型のアーキテクチャが必須であると言えよう。

本論文で試みた方法は、従来の計算機上でのデータの表現法、すなわち座標をそのままコネクショニズムの機構に載せようとするものであった。これはコネクショニズムの利点を十分に活かしているとは言い難い。はたして人間の頭脳の中で座標というものが考えられているのだろうか。本論文では、従来の座標という物差しを使うにとどめた。問題の規模と収束の実際的速さをふまえた上で、コネクショニズムにより適した幾何学的制約の表現方法を捜し求めることは、今後の課題である。

■参考文献

[1]Fuller, N. and Prusinkiewicz, P., "Geometric Modeling with Euclidean Constructions," Proc. of CG International '88, pp.379-391, 1988.

[2]Kamada, T., "On Visualization of Abstract Objects and Relations," Doctoral Dissertation, Dept. of Information Science, Fac. of Science, The University of Tokyo, 1989.

[3]Kin, N. et al., "PictureEditor: A 2D Picture Editing System Based on Geometric Constructions and Constranits," Proc. of CG International'89, pp.193-207, 1989.

[4]Noma, T., "Geometric Construction, Constraints, and Propagation," Doctoral Dissertation, Dept. of Information Science, Fac. of Science, The University of Tokyo, 1989.

[5]高井、金、”幾何学的制約緩和問題へのコネクショニストアプローチ（１）”、情報処理学会第４１回全国大会論文集、1990.

[6]White, R.M., "Applying Direct Manipulation to Geometric Construction Systems," Proc. of CG International '88, pp.446-455, 1988.