極小限定の確率的意味について*

6C－7

佐藤 健†
(財) 新世代コンピュータ開発機構‡

1　はじめに

非単調推論 [1] は, 不完全な知識下における人間の推論である. たとえば, 常識を用いることにより, 欠如した知識を補うような推論がこの例である. 極小限定 [2] や非単調論理 [3] はこのような推論の論理的な定式化として提案された. これに対し, 常識というのは, 「よく起こること」を集めたものと考えられるので, 確率的な要素が入っていると考えることもできる. このような考え方から, 確率に基づいて非単調推論を定式化しようとする研究が, 最近多くなされている [5]. また, McCarthy[4] は, 極小限定が定性的な確率を表現できることを述べている. このように非単調推論の論理的な定式化と確率との間には密接な関係があると思われるが理論的な関係はいまだ明らかになっておらず, Lifschitz[6] は, 人工知能の論理によるアプローチの一つの問題として論じている. 本論文は, この問題に対する一つの答を与えるものであり, 命題論理における極小限定のある部分クラスに関して確率的意味を与える.

2　確率と極小限定

直感的にいえば, 極小限定では, 「現在の知識からあることが真であるとわからなければ, そのことを偽と仮定する ("極小化する" と呼ぶ)」という推論を定式化している. たとえば極小限定を用いれば, 常識的には起こり得ないことを偽と仮定するような推論を定式化できる.

このような推論を表現するために, 極小限定では可能世界の集合に「極小化したいことをできるだけ偽とする世界が望ましい」という選好順序 (preference) を導入し, 現在の知識を真とする可能世界のうち, その順序の中で一番望ましい世界だけを仮定する. この順序を「その世界が現実世界である確率」の大小関係として解釈すれば, 一番望ましいものを選ぶということは, 一番起こりやすい可能世界を選ぶことに対応している. つまり, 極小限定における推論は, 一番起こりやすい可能世界のみを仮定する推論であると考えられる.

しかし, 極小限定における選好順序は, 半順序であるのに対し, 確率の大小関係は全順序である. したがって, 確率の大小関係として一般の選好順序を直接に論じることはできないので, ここでは, ランク付けされた (ranked) 選好順序 [7] を持つものに制限して考えることにする. ランク付けされた選好順序においては可能世界の集合が階層構造をなし, あるランクに属する各可能世界は, 上のランクのすべての可能世界よりも望ましくなっている. したがって, 同じランクに属するものは同じ確率を持っていると考えれば選好順序を全順序としてみなすことができる.

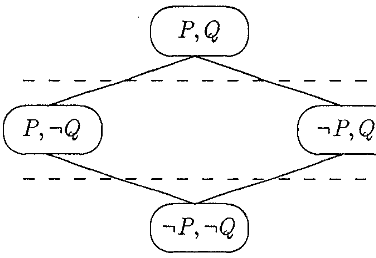

図 1: 選好順序

*Probabilistic Semantics for Circumscription
†Ken Satoh
‡Institute for New Generation Computer Technology

3　確率による極小限定の解釈

紙面の都合上, 例を使って基本的なアイデアを述べる. くわしい議論は [8] を参照されたい. 今, 命題記号として P, Q を考え, できるだけ P, Q とも極小化するものとする. すると可能世界としては, P, Q にすべての真偽値の組み合わせを与えた $\langle \neg P, \neg Q\rangle$, $\langle P, \neg Q\rangle$, $\langle \neg P, Q\rangle$ ならびに $\langle P, Q\rangle$ の4つの場合が考えられる.

P, Q をできるだけ極小化することは, P, Q をできるだけ偽とする世界を望ましいとすることであるので, 図1のような順序が存在することになる. ただし, 下へ行くほど望ましいとする. さて, P, Q からなる論理式 A が真であるとわかったときに P, Q をできるだけ極小化するということは, A を真とする可能世界の中で上で定義した順序において一番望ましい世界のみを仮定することである. このようにして得られた一番望ましい可能世界の集合を $Min(A; P, Q)$ と書くことにし, $Min(A; P, Q)$ の中のすべての可能世界において B が真となることを $Min(A; P, Q) \models B$ と書くことにする. これが, 極小限定のモデル論による定義である.

たとえば, $A = P \vee Q$ とすれば, それを満たす可能世界は $\langle P, \neg Q\rangle$, $\langle \neg P, Q\rangle$, $\langle P, Q\rangle$ となり, その中で図1の順序で一番望ましい世界の集合 $Min(P \vee Q; P, Q)$ は, $\{\langle P, \neg Q\rangle, \langle \neg P, Q\rangle\}$ となる. B を $\neg P \vee \neg Q$ とすれば, これは, 上の2つの世界すべてで共通に成り立っているので, $Min(P \vee Q | P, Q) \models (\neg P \vee \neg Q)$ となっている.

図1の順序はランク付けできるので同じランク内の

可能世界に同じ確率を割り当てれば，可能世界の順序を全順序に写像することができる．さて，1 より小さい正の値をとる x をパラメータとする可能世界の確率 (可能世界が現実世界である確率)P_x を以下のような条件を満たすように与える．

1. 同一ランク内の可能世界には，同じ確率を割り当てる．
2. ランクが一つ上がるごとに可能世界の確率は，x 倍される．
3. すべての可能世界の確率の総和が 1 となる．

x は，各可能世界の起こりやすさの相対的度合いを示しており，x が 1 より小さい値を取るのでランクが上がるごとに確率が低くなる．上の条件を満たす割り当てはこの場合以下のようになる．

$$P_x(\langle\neg P, \neg Q\rangle) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$P_x(\langle P, \neg Q\rangle) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{(1+x)^2}$$

$$P_x(\langle\neg P, Q\rangle) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{(1+x)^2}$$

$$P_x(\langle P, Q\rangle) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

すると，命題論理式 A の確率 $P_x(A)$ は A を真とする可能世界の確率の和で定義される．たとえば，$P \vee Q$ である確率 $P_x(P \vee Q)$ は，以下のようになる．$P \vee Q$ を真とする可能世界は，$\langle P, \neg Q\rangle$, $\langle\neg P, Q\rangle$, $\langle P, Q\rangle$ であるので，

$$\begin{aligned} P_x(P \vee Q) &\stackrel{\text{def}}{=} P_x(\langle P, \neg Q\rangle) + P_x(\langle\neg P, Q\rangle) + P_x(\langle P, Q\rangle) \\ &= \frac{2x + x^2}{(1+x)^2} \end{aligned} \qquad (1)$$

また，A のもとでの B の条件付確率 $P_x(B|A)$ は，以下のように定義される．

$$P_x(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & A\text{ が恒偽のとき} \\ \dfrac{P_x(A \wedge B)}{P_x(A)} & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

すると，$Min(A; P, Q) \models B$ のときかつそのときにかぎり $\lim_{x\to 0} P_x(B|A) = 1$ が成り立つことを示すことができる．ここで x を 0 に近づけるということは，起こりにくい可能世界の確率を 0 に近づけることに対応する． また，$P_x(B|A)$ が x が 0 に近づくにつれて 1 に近づくということは，A を真とする可能世界の中で一番起こりやすい世界での B の確率が 1 に近づくことに対応する． すなわち，A を真とする可能世界の中で一番起こりやすい世界においては B が真であることがきわめてもっともらしいということを表している．これが，極小限定の直感的な確率的意味である．

たとえば，$A = (P \vee Q)$ とし，$B = (\neg P \vee \neg Q)$ とする．すると上の議論より $Min(A; P, Q) \models B$ となっている．さて，

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} P_x(\neg P \vee \neg Q | P \vee Q) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{P_x((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q))}{P_x(P \vee Q)} \end{aligned} \qquad (2)$$

を求めてみよう．

$$P_x((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)) = \frac{2x}{(1+x)^2}$$

と (1) より，(2) 式は

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x + x^2} = 1.$$

となる．したがって，$\lim_{x\to 0} P_x(\neg P \vee \neg Q | P \vee Q) = 1$ が成り立ち，極小限定の結果と一致する．

実は，上のことはランク付けされた選好順序すべてで成り立つ．

定理 1

A が真のときの可能世界間の選好順序 $<$ における一番望ましい可能世界の集合を $Min(A; <)$ と書くことにする．選好順序がランク付けされているとき，確率 P_x を上の 1~3 の条件をみたすように可能世界への割り当てると，以下の関係が成り立つ．

$$Min(A; <) \models B \text{ if and only if } \lim_{x\to 0} P_x(B|A) = 1.$$

4 おわりに

本論文では，ランク付けされた選好順序によって定義される極小限定に対して，はじめて確率的意味を与えた．

残念ながら，極小限定における選好順序は一般にはランク付けされていない．たとえば，3 つ以上の命題に対する並列極小限定 (parallel circumscription) における選好順序はランク付けされていない．したがって，より一般的な極小限定に対する確率的意味は本論文で述べた以外の意味を与える必要があり，今後の課題である．

本論文に対して貴重な御意見を頂いた ICOT の研究員に感謝します．

参考文献

[1] 渕 一博監修，古川 康一，溝口 文雄 共編: 知識プログラミング，第 8 章 非単調推論，pp. 189–214，共立出版 (1988).

[2] McCarthy, J.: *Circumscription - a Form of Non-monotonic Reasoning*, Artificial Intelligence, Vol. 13, pp. 27 – 39 (1980).

[3] 松本 裕治，佐藤 健: 非単調論理と常識推論，情報処理，Vol. 30, No. 6, pp.674 – 683 (1989).

[4] McCarthy, J.: *Applications of Circumscription to Formalizing Common-Sense Knowledge*, Artificial Intelligence, Vol. 28, pp. 89 – 116 (1986).

[5] Pearl, J.: *Probabilistic Semantics for Nonmonotonic Reasoning: A Survey*, Proc. of KR-89, pp. 505 – 516 (1985).

[6] Lifschitz, V.: *Open Problems on the Border of Logic and AI*, Unpublished Maniscript (1989).

[7] Lehmann, D.: *What Does a Conditional Knowledge Base Entail?*, Proc. of KR-89, pp. 212 – 222 (1989).

[8] Satoh, K.: *A Probabilistic Interpretations for Lazy Nonmonotonic Reasoning*, ICOT-TR-525 (1989)