正弦・余弦複合多項式による関数近似

6K－4

秦野和郎（愛知工業大学・電子工学科）

1・はじめに、

閉区間[0,π]で与えられる関数f(x)をFourier正弦展開し有限項で打ち切ると両端における偶数次の微係数が零でないとき両端付近に振動を生ずる.又、Fourier余弦展開し有限項で打ち切ると両端における奇数次の微係数が零でないとき両端付近に振動を生ずる.本稿ではこれらの振動成分が多項式と三角多項式との和から成ることを示し、これに基づいて一つの近似法を構成する.

2・打ち切りFourier正弦・余弦級数の誤差、

十分に滑らかな関数$f(x):x\in[0,2\pi]$が

$$f(2\pi-x)=f(x) \tag{1}$$

を満たすとき$f(x)$は

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{\infty}a_j(f)\cos jx \tag{2}$$

$$a_j(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos jx\cdot dx \tag{3}$$

とFourier余弦展開される.式(3)に部分積分を反復適用すると

$$a_j(f)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i}}\{(-1)^jf^{(2i-1)}(\pi)-f^{(2i-1)}(0)\}$$

$$+\frac{2(-1)^{m-1}}{\pi j^{2m+1}}\int_0^{\pi}f^{(2m+1)}(t)\sin jt\cdot dt \tag{4}$$

となる.打ち切りFourier余弦級数

$$C_n(f;x)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{2n-1}a_j(f)\cos jx \tag{5}$$

の誤差

$$f(x)-C_n(f;x)=\sum_{j=2n}^{\infty}a_j(f)\cos jx \tag{6}$$

に式(3)を代入すると

$$f(x)-C_n(f;x)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\{f^{(2i-1)}(\pi)\tilde{q}_{2i}(\pi-x;2n)$$

$$-f^{(2i-1)}(0)\tilde{q}_{2i}(x;2n)\}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f^{(2m+1)}(t)\{\tilde{q}_{2m+1}(t+x;2n)+\tilde{q}_{2m+1}(t-x;2n)\}dt \tag{7}$$

を得ることができる.但し、

$$\tilde{q}_{2i}(x;2n)=\sum_{j=2n}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i}}\cos jx \tag{8}$$

である.ここで$\tilde{q}_{2i}(x;1)$が2i次の多項式であることに注意すると式(7)の右辺第一項は2m次の多項式と2n-1次の三角多項式との和であることがわかる。

次に、十分に滑らかな関数$f(x):x\in[0,2\pi]$が

$$f(2\pi-x)=-f(x) \tag{9}$$

を満たすとき$f(x)$は

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}b_j(f)\sin jx \tag{10}$$

$$b_j(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin jx\cdot dx \tag{11}$$

とFourier正弦展開される。式(11)に部分積分を反復適用すると

$$b_j(f)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i+1}}\{(-1)^jf^{(2i)}(\pi)-f^{(2i)}(0)\}$$

$$-\frac{2(-1)^{m-1}}{\pi j^{2m+1}}\int_0^{\pi}f^{(2m+1)}(t)\cos jt\cdot dt \tag{12}$$

となる.打ち切りFourier正弦級数

$$S_n(f;x)=\sum_{j=1}^{2n-1}b_j(f)\sin jx \tag{13}$$

の誤差

$$f(x)-S_n(f;x)=\sum_{j=2n}^{\infty}b_j(f)\sin jx \tag{14}$$

に式(12)を代入すると

$$f(x)-S_n(f;x)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{m}\{-f^{(2i)}(\pi)\tilde{q}_{2i+1}(\pi-x;2n)$$

$$-f^{(2i)}(0)\tilde{q}_{2i+1}(x;2n)\}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f^{(2m+1)}(t)\{\tilde{q}_{2m+1}(t+x;2n)-\tilde{q}_{2m+1}(t-x;2n)\}dt \tag{15}$$

を得ることができる.但し、

$$\tilde{q}_{2i+1}(x;2n)=\sum_{j=2n}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i+1}}\cos jx \tag{16}$$

である.ここで$\tilde{q}_{2i+1}(x;1)$が2i+1次の多項式であることに

Approximation by sine and cosine composite Polynomials

Kazuo HATANO　AICHI Institute of Technology

注意すると式(15)の右辺第一項は2m+1次の多項式と2n-1次の三角多項式との和であることがわかる。

3・正弦・余弦複合多項式とその表現、

$D\equiv d/dx$として

開区間$(0,\pi)$において

$$D^{2m+1}\prod_{j=1}^{2n-1}(D^2+j^2)h(x)=0$$

$$h(-x)=h(x) \tag{17}$$

を満たす実関数$h(x)$の全体を余弦複合多項式と呼ぶことにし、$H_c^{(m,n)}[0,\pi]$と書くことにする.又、

開区間$(0,\pi)$において

$$D^{2m+1}\prod_{j=1}^{2n-1}(D^2+j^2)h(x)=0$$

$$h(-x)=-h(x) \tag{18}$$

を満たす実関数$h(x)$の全体を正弦複合多項式と呼ぶことにし、$H_s^{(m,n)}[0,\pi]$と書くことにする.

式(17),(18)からわかるように正弦・余弦複合多項式は一般に2m次の多項式と2n-1次の三角多項式との和で与えられる.但し正弦複合多項式は奇関数であり、余弦複合多項式は偶関数である.

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{i=0}^{\infty}B_i(x)\frac{t^i}{i!} \tag{19}$$

で定義されるi次のBernoulli多項式$B_i(x)$を使って次のように、多項式$p_i(x)$を定義する.

$$\begin{cases} p_1(x)=\begin{cases}(x-\pi) & : x\in(0,2\pi)\\ 0 & : x=0,2\pi\end{cases} \\ p_i(x)=\dfrac{(2\pi)^i}{2\cdot i!}B_i\left(\dfrac{x}{2\pi}\right) \quad : i\geqq 2\end{cases} \tag{20}$$

Bernoulli多項式のFourier展開から

$$\tilde{q}_i(x;1)=p_i(x) \quad : i\geqq 1 \tag{21}$$

であることが容易にわかる.

$$c_i\tilde{q}_i(\pi-x;n)+c_j\tilde{q}_j(x;n)=0 \tag{22}$$

が恒等的に成り立つのは$c_i=c_j=0$のときに限るので任意の余弦複合多項式$h(x)\in H_c^{(m,n)}[0,\pi]$は

$$h(x)=\frac{1}{2}\tilde{a}_0+\sum_{j=1}^{2n-1}\tilde{a}_j\cos jx+\sum_{i=1}^{m}\{\lambda_{2i}p_{2i}(\pi-x)+\mu_{2i}p_{2i}(x)\} \tag{23}$$

又は

$$h(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{j=1}^{2n-1}a_j\cos jx+\sum_{i=1}^{m}\{\lambda_{2i}\tilde{q}_{2i}(\pi-x;2n)+\mu_{2i}\tilde{q}_{2i}(x;2n)\} \tag{24}$$

等と表現される.同じように任意の正弦複合多項式$h(x)\in H_s^{(m,n)}[0,\pi]$は

$$h(x)=\sum_{j=1}^{2n-1}\tilde{b}_j\sin jx+\sum_{i=0}^{m-1}\{\lambda_{2i+1}p_{2i+1}(\pi-x)+\mu_{2i+1}p_{2i+1}(x)\} \tag{25}$$

又は

$$h(x)=\sum_{j=1}^{2n-1}b_j\sin jx+\sum_{i=0}^{m-1}\{\lambda_{2i+1}\tilde{q}_{2i+1}(\pi-x;2n)+\mu_{2i+1}\tilde{q}_{2i+1}(x;2n)\} \tag{26}$$

等と表現される.

4・正弦・余弦複合多項式による関数近似、

以上の知識を使うと十分に滑らかな関数$f(x):x\in[0,\pi]$に対して多項式と三角多項式との和を使って次のような近似式を構成することができる.すなわち式(7),(24)から$f(x):x\in[0,\pi]$に対して余弦複合多項式近似

$$I_n^{(m)}(f;x)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{2n-1}a_j(f)\cos jx+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\{f^{(2i-1)}(\pi)\cdot\tilde{q}_{2i}(\pi-x;2n)+f^{(2i-1)}(0)\tilde{q}_{2i}(x;2n)\} \tag{27}$$

を定義することができ、式(15),(26)から正弦複合多項式近似

$$J_n^{(m)}(f;x)=\sum_{j=1}^{2n-1}b_j(f)\sin jx+\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{m-1}\{f^{(2i)}(\pi)\cdot\tilde{q}_{2i+1}(\pi-x;2n)+f^{(2i)}(0)\tilde{q}_{2i+1}(x;2n)\} \tag{28}$$

を定義することができる.それぞれの近似式の誤差限界は

$$|f(x)-I_n^{(m)}(f;x)|\leqq\frac{4}{\pi}\zeta(2m+1;2n)\|f^{(2m+1)}\|_\infty \tag{29}$$

$$|f(x)-J_n^{(m)}(f;x)|\leqq\frac{2}{\pi}\zeta(2m+1;2n)\{|f^{(2m)}(\pi)|+|f^{(2m)}(0)|+2\|f^{(2m+1)}\|_\infty\} \tag{30}$$

で与えられる.ここで$\zeta(i;n)$は一般化されたRiemannのZeta関数である.

5・おわりに、

正弦・余弦複合多項式に関して、より直交性のよい関数系を構成することができるがここでは割愛する.又、実用上は離散近似が必要であるが別の機会に検討したい.