

平行移動する複数の点集合または線分集合に対するVoronoi図の複雑さと文字配置への応用

5K-4

今井 浩* 青沼 裕美* 徳山 豪*

*九州大学工学部

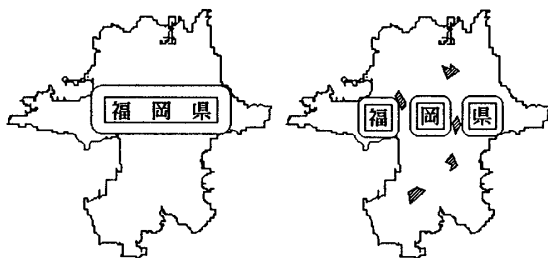
*日本IBM東京基礎研究所

1. まえがき

マルチメディア・データベースのうちでも地図データベースは用途も広く、近年盛んに研究されている。その中で、利用者の要求する地図を実時間で合成、表示するための文字自動配置機能の重要性が指摘されている[1][6]。文字自動配置機能は簡単にいえば、白地図中に自動的に文字を配置する利用者インタフェース機能で、それを実現するためには種々の幾何学的問題を高速に解くアルゴリズムが必要である。本稿では、地図中の領域図形へのわかりやすい文字配置問題に関連して次の問題を考える。

<問題a> 領域図形Nの中に文字列を表す長方形Rを水平に配置する。ここで、領域の境界bd(N)とRとの最小距離を最大にするような配置位置を求める(図1(a))。

<問題b> 同じく領域図形Nの中に個々の文字を表す正方形Cを水平に間隔hでm個配置する。各正方形と領域の境界bd(N)との最小距離を最大にするような正方形の配置位置と、間隔hを求める(図1(b))。



(a) 長方形(文字列) (b) 複数の正方形(個々の文字)
図1 領域図形への文字配置

2. Lc-Voronoi図を用いた解法

問題a, bを解くために、この問題に応じた距離に基づくVoronoi図としてLc-Voronoi図を定義する。ここで一般論として、問題の定義で用いた長方形Rではなく、凸多角形Cを領域図形Nの中に配置する問題として議論を進める。

定義1 (Lc距離)

Cの参照点(Cに相対的な位置にある定点。例えばCの中心点など)を平面上のある点rに置いたときのCとbd(N)の辺liに対するLc距離dcを次のように定義する。

$$dc(C(r), l_i) = \min \{ d_2(p, q) \mid p : C \text{ 上の任意の点}, q : l_i \text{ 上の任意の点} \}$$

ここに2点p(x1, y1)とq(x2, y2)の距離d2はpとqのEuclid距離である。

定義2 (Lc-Voronoi図)

bd(N)が辺li(i=1, ..., n)で成るとき、liのLc-Voronoi領域を次で定義する。

The complexity of the Voronoi diagram for rigidly translating sets of points or segments and its application to character placing problem

Hiroshi IMAI*, Hiromi AONUMA* and Takeshi TOKUYAMA*

*Faculty of Engineering, Kyushu University

*IBM Tokyo Research Laboratory

$$V(l_i) = \cap_{j \neq i} \{ p \mid dc(C(p), l_i) \leq dc(C(p), l_j) \}$$

V(li)の境界図形をbd(N)のLc-Voronoi図とする。また、Lc-Voronoi点とは、その点に参照点をおくCがbd(N)の少なくとも3辺にLc距離で等距離な点である。Lc-Voronoi図が求まれば、各Voronoi点を調べ、境界までの距離が最大の点を中心として長方形を配置すれば問題aは解ける。また、Lc-Voronoi図はNに対するCの配置可能領域[5](その領域内にCの参照点があればCはNに含まれる)のEuclid距離Voronoi図を計算することにより求められる[2]。以上をまとめて次の定理を得る[2]。

定理1 問題aはLc-Voronoi図を用いることにより、O(n log n)の手間で解ける。

次に問題bを解く前に、文字間の距離hが与えられる問題を考える。領域図形を距離hずつずらしてm個水平に重ね、その交わりの領域をINTとする。INTの内部で正方形Cをひとつ配置する問題はINTとCに対する問題aとみなせ、またこれによってhが一定であるとき問題bが解ける。従って、一般の問題bは次の「問題b'」で言い換えることができる。

<問題b'> n本の線分から成る多角形Nがm個ある。各々をNi(i=1, ..., m)とする。時刻t=0で全てのNiは同じ位置にあり、時刻とともにNi+1(i=1, ..., m-1)はNiに対して相対的に一定速度V0でx軸方向に平行移動する。m個のNの重なりでのLc-Voronoi図の0 ≤ t ≤ ∞における変化を調べ、最適配置を求める。

3. 動的点集合のVoronoi図の性質

問題b'を解くためには、複数個の平行移動する多角形の辺に対するLc-Voronoi図を求めなければならない。本節ではこの種の問題で最も基本的である、平行移動する複数個の点集合のEuclid距離Voronoi図について調べる。

次の記号を定義する。

Si: 点Pij(j=1, ..., n)を要素とする点集合(i=1, ..., m)。

固有Vi, 固有Voronoi図(辺, 点, 領域):
ある点集合Siの要素のみを母点として構成されるVoronoi図, Voronoi辺, Voronoi点, Voronoi領域。

固有Vk, 固有Voronoi図(辺, 点, 領域):
時刻t = tkで点Pij(i=1, ..., m, j=1, ..., n)を母点として構成されるVoronoi図, Voronoi辺, Voronoi点, Voronoi領域。

Siが平行移動するときに、過程でVoronoi点を形成するような3点の組合せの総数を求めれば、Voronoi図の変遷の複雑さが分かる。

Voronoi点を形成する点の組合せの変化は、3点a, b, cがその円周上にある円の内部に、新たに他の点dが入り込む時に起こる。つまり、4点が同一円周上にあるような場合の数を数えれば、Voronoi点を成す点の組合せの変化数が論じられる。

以下では、点集合が2つ(m=2), 3つ(m=3), 4つ以上(m ≥ 4)の場合に分けてVoronoi図の変化数を考察する。

定理2 点集合が2つの場合, Voronoi図の変化数は $O(n^2)$ である[7].

証明 点集合を N_1, N_2 とすれば, ある時刻で同一円周上に存在する4点は, ① N_1, N_2 から2点ずつ, ② N_1 から3点または N_2 から3点, の2つの場合が考えられる.

①では, 固有Voronoi辺2辺の交点が併合Voronoi点となり, また各々の固有Voronoi辺は $O(n)$ 本であるので, 交差する可能性のある固有Voronoi辺の数は $O(n \times n) = O(n^2)$ となる.

②では固有Voronoi点 ($O(n)$ 個) を成す3点ともう一方の集合の1点の組合せを調べることにより, 同様に $O(n^2)$ であることがわかる.

従って全体で $O(n^2)$ 個の変化が有り得る. \square

定理3 点集合が3つの場合, Voronoi図の変化数は $O(n^2 2^{O(\alpha(n))})$ である. (ここに, $\alpha(n)$ はAckermann関数の逆関数)

証明 点集合が3つであれば, ある時刻で同一円周上に存在する4点のうち2つは必ず同じ集合に属する. つまり, 変化する瞬間の併合Voronoi点はある集合 S_i の固有Voronoi辺上にある.

そのような2点を P_1, P_2 とし, P_1, P_2 の固有Voronoi辺上での変化を考える. この変化数を評価するには[4]の手法を使うことができる. この場合, P_1, P_2 と他の2つの集合内の点 P_3, P_4 とが同一円周上になる回数は高々3であることがわかる. また, P_3, P_4 各々は P_1, P_2 を結ぶ直線と高々1回しか交わらないことから, この P_1, P_2 に対する固有Voronoi辺上での変化は $O(\lambda_{3+1}(n)) = O(n^2 2^{O(\alpha(n))})$ であることがわかる. また, 固有Voronoi辺を成す点対は $O(n)$ 個であるから, 全体として $O(n \lambda_4(n)) = O(n^2 2^{O(\alpha(n))})$ 個のVoronoi図の変化がある. (ここで $\lambda_4(n)$ は4次のDS-列の最大長である; 例えば[3]参照) \square

定理4 点集合が4つ以上であれば, Voronoi図の変化数は $O(n^3)$ である.

証明 4点が同一円周上に存在するときの円の中心点の位置により, 次の2つの場合にわけていう.

①円の中心点は固有Voronoi辺上にある.

②円の中心点は固有Voronoi辺上にない.

①の場合: 点集合が3つの場合と同じく, $O(n^2 2^{O(\alpha(n))})$.

②の場合: ある時刻 t_k では, 平面は各固有Voronoi領域を m 個単に重ね合わせることによって細分化されている. その細分化された面の一つ (内部に固有Voronoi辺を含まない) を r とする. ある時刻 t_k において r を, m 個の点 $P_{i_1 i_2}$ (i_1, i_2 は各 i に一つ定まる. $i=1, 2, \dots, m, 1 \leq i_1 < i_2 \leq m$) のVoronoi領域の交わりとすると, r の内部の併合Voronoi図は点 $P_{i_1 i_2}$ のみを母点とするVoronoi図である. したがって, 次の2段階の処理でVoronoi図の変化数を調べられる.

処理1: ある時刻 $t_k (0 \leq t_k \leq \infty)$ において, 各固有Voronoi領域の交わりが非空である m 点 ($S_i (i=1, \dots, m)$ から各々1点ずつ) の組合せを求める.

処理2: 処理1で求めた各組合せ C_k について C_k を成す m 点のみを母点とする併合Voronoi図の変化数を求める.

<処理1: 固有Voronoi領域の組合せの数>

交わりが非空である m 対の固有Voronoi領域の組合せの数は, $0 \leq t \leq \infty$ で次のアとイが起り得る回数と同じである.

ア. ある固有Voronoi点を他の固有Voronoi辺が通過する.
イ. 異なる固有Voronoi図の2辺 E_i と E_j の交点をまた別のVoronoi図の辺 E_k が通過する

アの場合, 固有Voronoi辺は全体で $O(mn)$ 本, 固有Voronoi点も $O(mn)$ 個であり, 1つのVoronoi辺は全てのVoronoi点と交差する可能性があるので, 組合せの数は $O((mn)^2)$. イの場合, 交点を持つ2辺の組合せは $m_n C_2$ より $O((mn)^2)$. その点を通過し得る辺は mn 本あるので, 組合せの数は $O((mn)^3)$ である.

従ってアとイを併せて

$$O((mn)^2) + O((mn)^3) = O((mn)^3)$$

個の組合せがありうる.

<処理2: m点が移動するときのVoronoi点の変化数>

m 点は同じ方向に異なる速度で平行移動するので, Voronoi点の変化数は $O(m^3)$ であることが知られている.

<全体での併合Voronoi点の変化数>

ここまでの考察により, $0 \leq t \leq \infty$ において固有Voronoi辺の内部ではVoronoi点の変化数は

$$O(m^3 \times (mn)^3) = O(m^6 n^3)$$

である. 従って, 場合①, ②を併せて考えると,

$$O(n^2 2^{\alpha(n)}) + O(m^6 n^3) = O(m^6 n^3)$$

ここで, m は領域中に配置される文字数なので, 定数と考えられるから, n に対する3乗のオーダーの変化があると考えられる. \square

4. 線分のLc-Voronoi図への拡張について

平行移動する点集合のVoronoi図の考察を線分のLc-Voronoi図に拡張すると, 同様な議論から次の結果が得られる.

定理5 平行移動する線分集合のLc-Voronoi図の変化数は, $m=2$ の場合 $O(n^2)$, $m \geq 3$ の場合 $O(n^3)$ となる. そして問題 b は $m=2$ の場合 $O(n^2 \log n)$ の手間で, $m \geq 3$ の場合 $O(n^3 \log n)$ の手間で解くことができる.

5. まとめ

本論文では点集合または線分集合が平行移動するときのVoronoi点の変化数を考察し, 領域図形への文字配置アルゴリズムへ応用できることを述べた.

謝辞

有益なご意見を頂いた, 九州大学上林教授, 有川助手, ならびに研究室の諸氏に感謝いたします. 尚, 1, 2番目の著者の研究の一部は, 文部省科研費による援助を受けた.

参考文献

- [1] H. Aonuma, H. Imai, Y. Kambayashi: A Visual System of Placing Characters Appropriately in Multimedia Map Databases. In "Visual Database Systems" (Proc. IFIP TC-2 Working Conf. T.L. Kunii, ed.), April, 1989, pp. 525-546.
- [2] 青沼裕美, 今井浩, 徳山豪: 文字配置問題に関連した種々のVoronoi図について. 電子情報通信学会研究報告, 89-AL, 1989.
- [3] 今井浩: 計算幾何学の最近の動向. 電子情報通信学会誌, 1988, PP. 1307-1314.
- [4] K. Imai, S. Sumino, H. Imai: Minimax Geometric Fitting of Two Corresponding Sets of Points. Proc. ACM 5th Annual Symp. on Computational Geometry Conference, 1989, pp. 266-275.
- [5] S. J. Fortune: A Fast Algorithm for Polygon Containment by Translation. Proc. Int. Conf. Automata, Languages and Programming, Lecture Notes in Comp. Sci. Vol. 194, pp. 189-198, 1985.
- [6] 上林彌彦, 有川正俊: 図形データにおける概視機能とその実現. 情報処理学会研究報告. 86-DB-54, 1986.
- [7] T. Tokuyama: Deformation of Merged Voronoi Diagrams with Translation. IBM TRL Report, 1988.