4K－3

ファジィインターバル論理関数の標準形

菊池 浩明　向殿 政男

明治大学　理工学部

1．はじめに

ファジィ論理[1]はあいまいさの理論であるファジィ集合論の本質である．ところが，我々の日常の論理にはファジィ論理では取り扱えない命題がいくつか存在する．例えば，次の命題の集合が恒真式として与えられたとする．

{甘いものはおいしい，おいしいものは好き，
太るものは好きでない，甘いものは太るものである}

この時，命題「甘いものは好き」の真理値はどうなるだろうか？ 真でありかつ偽である，これは矛盾である．逆に，上の恒真式の集合より，「高いものは好き」の真理値は定まるだろうか？これは未知と解釈できる．こうして，命題とその否定とが独立に閉区間[0,1]の値を真理値として取ることを許して，未知と矛盾のあいまいさを形式化することが本研究の動機である[2]．ファジィインターバル論理では，/P/=0.5，/¬P/=0.4となる命題の真理値を[0.5,1-0.4]=[0.5,0.6]という区間真理値で表現する．本稿では，命題が区間真理値を取るとき，それらのまたは（∨），かつ（∧），否定（¬）で構成される論理式で表現するされる関数であるファジィインターバル論理関数の性質を明らかにして，その一意的に定まる標準形を提案する．

2．ファジィインターバル論理関数

区間真理値は次のように定義される集合**I**の元である．

$$\mathbf{I}=\{[n,p]\mid n,p\in[0,1]\}$$

ただし，次の区間真理値を各々のシンボルで記す．

$[1,1]=\mathbf{1}$，$[0,0]=\mathbf{0}$，$[0,1]=\mathbf{U}$，$[1,0]=\mathbf{C}$

定義1　$x=[n_x,p_x],y=[n_y,p_y]$を区間真理値とする．

$$x\vee y=[\max(n_x,n_y),\ \max(p_x,p_y)]$$
$$x\wedge y=[\min(n_x,n_y),\ \min(p_x,p_y)]$$
$$x\curlyvee y=[\min(n_x,n_y),\ \max(p_x,p_y)]$$
$$x\curlywedge y=[\max(n_x,n_y),\ \min(p_x,p_y)]$$
$$\neg x=[1-p_x,1-n_x]$$
$$\sim x=[p_x,n_x]$$

ただし,明らかな場合には，$x\wedge y$をxyで，$\neg x$を$\bar{x}$で表す．

定義2　**ファジィインターバル論理関数**（以後，ＦＩ論理関数）とは，**I**の元をとる変数x_i（$i=1,\cdots,n$）と論理演算∨，∧，¬との有限回の結合により構成される論理式が表現する，$\mathbf{I}^n$から**I**への写像を行う関数である．

ＦＩ論理関数は，ファジィ論理と同様にべき等律，交換律，結合律，吸収律，分配律，復帰律，最大元，最小元，ドモルガン律が成立するが，相補律の一般化であるクリーネ律[1]に関しては一般にはいえない．

定義3　$\mathbf{I}^n$の２つの元$\mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_n)$と$\mathbf{b}=(b_1,\cdots,b_n)$が，$\forall i\ a_i\curlyvee b_i=a_i$である時，及びその時に限り$\mathbf{a}\succ\mathbf{b}$で示す．

定理1　（あいまいさの単調性）[2]
ＦをＦＩ論理関数とする．任意の$\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{I}^n$について，

$\mathbf{a}\succ\mathbf{b}\Rightarrow F(\mathbf{a})\succ F(\mathbf{b})$　　（証明略）

定理2　（あいまい否定に関する自己双対）[3]
ＦをＦＩ論理関数とする．任意の$\mathbf{a}\in\mathbf{I}^n$について，

$F(\sim\mathbf{a})=\sim F(\mathbf{a})$　　（証明略）

定理3　（ＦＩ論理関数の同値条件）[3]
ＦＩ論理関数G，Hが，任意の$\mathbf{a}\in\mathbf{I}_4{}^n=\{0,1,U,C\}^n$について

$G(\mathbf{a})=H(\mathbf{a})$

である時，及びその時に限り，全ての$\mathbf{x}\in\mathbf{I}^n$について，

$G(\mathbf{x})=H(\mathbf{x})$　　（証明略）

定理３は，ＦＩ論理関数が本質的に４値であることを意味している．よって，その標準形は$\mathbf{I}_4{}^n$の元についてのみ考えればよい．次の定理は重要である．

定理4　（展開定理）[4]
任意のｎ変数ＦＩ論理関数Fは，次のように展開できる．

$$\begin{aligned}F(x_1,\ldots,x_n)=&F(1,x_2,\ldots,x_n)x_1\vee F(0,x_2,\ldots,x_n)\overline{x_1}\\&\vee\{F(U,x_2,\ldots,x_n)\vee F(C,x_2,\ldots,x_n)\}x_1\overline{x_1}\\&\vee\{F(U,x_2,\ldots,x_n)F(C,x_2,\ldots,x_n)\}\end{aligned}$$

（例）次の２変数のＦＩ論理関数Fを展開する．

$$\begin{aligned}F(x,y)&=xy\vee\bar{x}x\bar{y}\vee y\bar{y}\\&=x(y\vee y\bar{y})\vee\bar{x}(y\bar{y})\vee x\bar{x}\{(Uy\vee U\bar{y}\vee y\bar{y})\\&\quad\vee(Cy\vee C\bar{y}\vee y\bar{y})\}\vee\mathbf{1}\{(Uy\vee U\bar{y}\vee y\bar{y})(Cy\vee C\bar{y}\vee y\bar{y})\}\\&=x(y\vee y\bar{y})\vee\bar{x}(y\bar{y})\vee x\bar{x}(y\vee\bar{y}\vee y\bar{y})\vee(y\bar{y})\end{aligned}$$

3．標準形

ＦＩ論理では相補律が成立しないので，変数xについて

$x,\ \bar{x},\ x\bar{x},\ 1$

の４つの互いに異なった論理積が考えられる．また，ファジィ論理でいうところのクリーネ律[1]をも一般には成立しないので，変数とその否定を同時に含む相補項についても最小の相補項に展開する必要はない．

定義4　任意の変数x_iについて，x_i，$\overline{x_i}$，$x_i\overline{x_i}$，1を**リテラル**と呼ぶ．いくつかのリテラルの論理積を**単積項**，論理和を**単和項**という．ただし，明らかなときは単に，単項と呼べば，単積項を指すものとする．特に，ある変数x_iについてその変数と否定の両方を同時に含む，すなわち$x_i\overline{x_i}$の形をしているリテラルを含む単項を**相補項**と呼ぶ．

定義5　全てのｎ変数の単項からなる集合をS_nで表す．

（例）２変数の単項の集合はＳ２は$2^{2*2}=16$個の単項からなる次のような集合である．

$$\{1,x,\bar{x},y,\bar{y},x\bar{x},xy,x\bar{y},\bar{x}y,\bar{x}\bar{y},y\bar{y},x\bar{x}y,x\bar{x}\bar{y},\bar{x}y\bar{y},xy\bar{y},x\bar{x}y\bar{y}\}$$

定義6　単積項の論理和を**論理和形**，単和項の論理積を**論理積形**という．

以後は，論理和形について議論するが，論理積形についても同様にいえる．

A Normal Form of Fuzzy Interval Logic Function

Hiroaki Kikuchi, Masao Mukaidono
School of Science and Technology, Meiji University

任意のｎ変数のＦＩ論理関数Fは，論理和形（論理積形）で表現できる．なぜならば，分配律，交換律，結合律が成立するので，常に，いくつかの単項の和に展開できるからである．更に，べき等律が成立しているので，あるFに同じ単項は高々１つしか存在しない．ここに，更に吸収律を適用することでその標準形が定まるのだが，そのためのいくつかの準備をしよう．

定義７　２つの単項α，βが，

$$\alpha \vee \beta = \alpha$$

を満たすとき，及びその時に限り，単項αは単項βを**包含する**といい，$\boldsymbol{\alpha \supset \beta}$と書く．
また，$\alpha \vee \beta \neq \alpha$である時を$\alpha \not\supset \beta$で表す．

（例）$\alpha = x$，$\beta = xy$　について，$\alpha \vee \beta = x \vee xy = x = \alpha$
よって，$\alpha \supset \beta$　である．
このように，包含関係による順序関係は，真偽の半順序関係に他ならない．また，次の補題が明らかである．

補題１　α，βを２つの単項とする．
　$\alpha \supset \beta$である時，及びその時に限り，単項αに存在する任意のリテラルが，常にβにも存在する．

定義８　$\mathbf{I}_4{}^n$の元$\boldsymbol{v}=(v_1,...,v_n)$に対応する単項$\alpha$とは，

$$\alpha = x_1{}^{v1} x_2{}^{v2} \cdots x_n{}^{vn}$$

なる積項である．但し，ここで

$$\begin{array}{lll} x_i{}^{vi} = x_i & v_i = 1 & \text{の時，} \\ \quad = \overline{x_i} & v_i = 0 & \text{の時，} \\ \quad = x_i \overline{x_i} & v_i = U & \text{の時，} \\ \quad = 1 & v_i = C & \text{の時．} \end{array}$$

（例）$\boldsymbol{v}=(1,0,U) \in \mathbf{I}_4{}^3$　に対応する単項は　$\alpha = x\bar{y}z\bar{z}$.

補題２　α，βを２つの単項とし，α，βに対応する$\mathbf{I}_4{}^n$のベクトルを$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$とする．
　$\alpha \supset \beta$である時及びその時に限り，$\mathbf{b} \succ \mathbf{a}$．

（例）２つの単項を$\alpha = xy$，$\beta = x\bar{x}yz$とすると，$\alpha \supset \beta$である．これらの単項に対応する$\mathbf{I}_4{}^3$のベクトルは$\mathbf{a} = (1,0,C)$，$\mathbf{b} = (U,0,1)$となり，$\mathbf{b} \succ \mathbf{a}$が成立している．

補題３　αを$\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_n) \in \mathbf{I}_4{}^n$に対応するｎ変数の単項とする．
$\boldsymbol{v} \in \{0,1,C\}^n$　　である時かつその時に限り　$\alpha(\boldsymbol{v})=1$
$\boldsymbol{v} \in \mathbf{I}_4{}^n - \{0,1,C\}^n$である時かつその時に限り　$\alpha(\boldsymbol{v})=U$
但しここで，記号－は２つの集合の差集合を表している．

系１　αを$\boldsymbol{v} \in \mathbf{I}_4{}^n$に対応するｎ変数の単項とする．

$$\alpha(\boldsymbol{v}) \in \{1,U\}.$$

補題４　αを$\boldsymbol{v} \in \mathbf{I}_4{}^n$に対応する単項とする．
ｎ変数の単項α'が，
$\alpha' \supset \alpha$　である時及びその時に限り　$\alpha'(\boldsymbol{v}) \in \{1,U\}$

（例）２変数の単項$\alpha = xy\bar{y}$と対応するベクトル$\boldsymbol{v} = (1,U)$を考える．
$\alpha' = xy$について，$\alpha' \supset \alpha$，$\alpha'(1,U) = U \in \{1,U\}$
$\alpha'' = y\bar{y}$について，$\alpha'' \supset \alpha$，$\alpha''(1,U) = U \in \{1,U\}$

系２　αを$\boldsymbol{v} \in \mathbf{I}_4{}^n$に対応する単項とする．
ｎ変数の単項α'が，
$\alpha' \not\supset \alpha$である時及びその時に限り，$\alpha'(\boldsymbol{v}) \in \{0,C\}$

定義９
Ｆを次のｍ個の単項から成る論理和形で表現されている，ｎ変数のＦＩ論理関数とする．

$$F = \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_m$$

この時，Ｆの任意の二つの単項α_iとα_jが包含関係にないとき；

$$\forall i \forall j \quad \alpha_i \not\supset \alpha_j \qquad (i,j=1,...,m)$$

Ｆは**既約標準形**と言う．
また，Ｆの任意の単項αについて，αに包含される全てのｎ変数の単項α'も常にＦに存在しているとき；

$$\forall \alpha \in F \quad \alpha \supset \alpha' \Rightarrow \alpha' \in F$$

Ｆは**最冗長標準形**という．

既約標準形はＦから余分な単項をすべて取り除いた式，最冗長標準形は，逆に，Ｆに可能な限り単項を加えた式である．
（例）２変数ＦＩ論理関数$F(x,y) = xy \vee x\bar{x}y \vee y\bar{y}$に対して，
既約標準形は，

$$F' = xy \vee y\bar{y}$$

最冗長標準形は，

$$F'' = xy \vee x\bar{x}y \vee xy\bar{y} \vee x\bar{x}y\bar{y} \vee y\bar{y} \vee xy\bar{y} \vee \bar{x}y\bar{y} \vee x\bar{x}y\bar{y}.$$

定理５　任意のＦＩ論理関数に対して，既約標準形と最冗長標準形は必ず存在して，それは一意的に定まる．

４．おわりに

命題とその否定とが独立に真理値を取ることで，情報の持つ確からしさを表現しようとする試み[5]は，形式化は異なるが，ファジィインターバル論理の他にも行われている．これらは，命題の持つ可能性や必然性を取り扱う可能性理論とも深く関連している．また，定理３で示されたようにその本質はある４値論理となるのだが，これも，Prolog等の論理型言語への応用を含めて，盛んに行われている[6][7]．本稿で提案した標準形は，従って，これらの論理体系にも同様に適用でき，統一的に取り扱うための一つの有効な手段となり得るだろう．
　今後は，この標準形を基に真理値表より論理式を定める表現定理や，ｎ変数のＦＩ論理関数がいったい幾つ存在するかという数え上げ問題等に取り組んでいく予定である．

参考文献

[1]向殿,ﾌｧｼﾞｨ論理における2,3の性質について,信学論(D),58-D,3(1975)
[2]菊池,向殿,ﾌｧｼﾞｨｲﾝﾀｰﾊﾞﾙ論理の提案,第4回ﾌｧｼﾞｨｼｽﾃﾑｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ講演論文集,pp.215-220(1988)
[3]菊池,向殿,ﾌｧｼﾞｨｲﾝﾀｰﾊﾞﾙ論理関数について,第5回ﾌｧｼﾞｨｼｽﾃﾑｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ講演論文集,pp.403-408(1989)
[4]菊池,向殿,ﾌｧｼﾞｨｲﾝﾀｰﾊﾞﾙ論理におけるシャノン展開,情報処理学会第39全国大会,2L-8,pp.63-64(1989)
[5]Driankov,D., Towards a many-valued logic of quantified belief, Ph.D. Thesis No.192, Univ. of Linkoping, Dept. of Computer Science.(1988)
[6]M.L.Ginsberg, Multivalued Logics: A Uniform Approach to Inference in Aritificial Intelligence, Computational Intelligence, vol 4, no.3(1988)
[7]M.C.Fitting, Negation As Refutation, Proceedings of Fourth Annual Symposium on Logic in Computer Science, IEEE, pp.63-69(1989)