

7J-3

可逆的座標変換の並列性に関する考察

志沢雅彦, 間瀬健二

NTTヒューマンインタフェース研究所

1. はじめに

著者は, [1], [2] において, 有限固定精度の整数座標で表現された幾何データに対して, 座標変換を可逆的に実行するアルゴリズムを提案した. この方法によれば, (1) 直交座標系で表現された幾何データに対しては, 任意の等積アフィン変換 (任意の剛体運動を含む) を [1], (2) 同次座標系で表現された幾何データに対しては任意の射影変換を [2] 可逆的に実行することができる.

この可逆座標変換アルゴリズムは同一の変換を多量のデータに対して施す場合に有効である. しかし, 分解された変換行列の中で, 一般の乗算を含む変換の数は, n 次元の可逆変換の場合 (n^2-1) 個となる. 従って, このままでは (n^2-1) ステップの演算が必要である.

本稿では, 可逆座標変換アルゴリズムの並列性を代数的に考察し, 並列演算を許した場合に演算ステップ数を削減する方法を示す.

2. 準備

可逆座標変換は, 一般に n 次元等積 1 次変換の変換行列 A (ただし, $|\det(A)| = 1$) が, 下に示す基本変換行列 $P_{ij}[s]$, Q_i , R_{ij} の積に分解される事実を用いる.

$$\begin{aligned} P_{ij}[s] &= I + sI_{ij} (i \neq j), \\ Q_i &= I - 2I_{ii}, \\ R_{ij} &= I - I_{ii} - I_{jj} + I_{ij} + I_{ji} (i \neq j). \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, I , I_{ij} はそれぞれ単位行列, 行列単位である. これらの基本変換の間には, 次の交換関係がある.

$$\begin{aligned} P_{ij}[s]R_{kl} &= R_{kl}P_{ij}[s] \quad (\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset), \\ P_{ik}[s]R_{kl} &= R_{kl}P_{ik}[s], \quad P_{kj}[s]R_{kl} = R_{kl}P_{kj}[s], \\ P_{ij}[s]R_{ij} &= P_{ij}[s]R_{ji} = R_{ji}P_{ij}[s], \\ P_{ij}[s]Q_k &= Q_kP_{ij}[s] \quad (j \neq k), \quad P_{ij}[s]Q_j = Q_jP_{ij}[-s], \end{aligned} \quad (2)$$

これらの交換関係を用いると, 分解列において変換行列 Q_i , R_{ij} は左端 (あるいは, 右端) にまとめることができる (この分解列を以下, 標準形と呼ぶことにする). 左端にまとめた後の Q_i , R_{ij} からなる部分を M とすると, 変換 M は, 各座標値の交換と符号反転のみを含む. 本解析では, この部分は無視し, 以下では残りの部分について考察する.

3. 可換性と並列性

$P_{ij}[s]$ の計算は, 乗算と加算を各 1 回含む. これらの演算は十分高速であり, 演算器は必要な数だけ用意できるが, レジスタは n 個に制限されていると仮定する. また, 加算器は, 3 入力以上を許容する. すなわち, 中間データの依存性のみにもとづいて並列性を解析する [3].

次の命題 1, 命題 2 の様に基本変換 $P_{ij}[s]$ の間の可換性が並列性と非並列性を本質的に規定すると考えられる.

命題 1: 変換行列 $P_{ij}[s]$ と $P_{kl}[t]$ (s と t は任意) は, $i \neq l$ かつ $j \neq k$ の場合に可換であり, $i = l$ または $j = k$ の場合には可換でない.

命題 2: 可換な基本変換は並列に実行可能であり, 可換でない基本変換は並列に実行不可能である.

次元 n が大きいほど変換行列 $P_{ij}[s]$ の可換な組合せの割合は増加するので, 並列度は上がる.

4. 例

例として, 次式の様な 4 次元の等積 1 次変換行列 A の分解を考える. この分解は文献 [1] の分解アルゴリズムによって得られる.

$$\begin{aligned} A &= P_{43}[s_{15}]P_{42}[s_{14}]P_{41}[s_{13}]P_{34}[s_{12}]P_{32}[s_{11}]P_{31}[s_{10}] \\ &\quad \times P_{43}[s_9]P_{24}[s_8]P_{23}[s_7]P_{21}[s_6]P_{32}[s_5]P_{14}[s_4] \\ &\quad \times P_{13}[s_3]P_{12}[s_2]P_{21}[s_1] \end{aligned} \quad (3)$$

4 次元の場合は, この様に 15 ステップの基本変換に分解される. ここで, 可換な基本変換を次の様に $\{ \}$ でくくってグループ化する.

$$\begin{aligned} A &= \{P_{43}[s_{15}]P_{42}[s_{14}]P_{41}[s_{13}]\} \\ &\quad \times \{P_{34}[s_{12}]P_{32}[s_{11}]P_{31}[s_{10}]\} \\ &\quad \times \{P_{43}[s_9]\}\{P_{24}[s_8]P_{23}[s_7]P_{21}[s_6]\} \\ &\quad \times \{P_{32}[s_5]\}\{P_{14}[s_4]P_{13}[s_3]P_{12}[s_2]\}\{P_{21}[s_1]\} \end{aligned} \quad (4)$$

したがって, 全体で 7 ステップで可逆座標変換が実行できる.

Fig.1 は式 (3), (4) の演算をベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ に施し, $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)^T$ を求める場合の並列性を説明した図である. この例では, 最大並列度は 3 なので, 演算器は 3 個ずつ必要である. この様に, 基本変換の演算としての可換性が並列性に対応する.

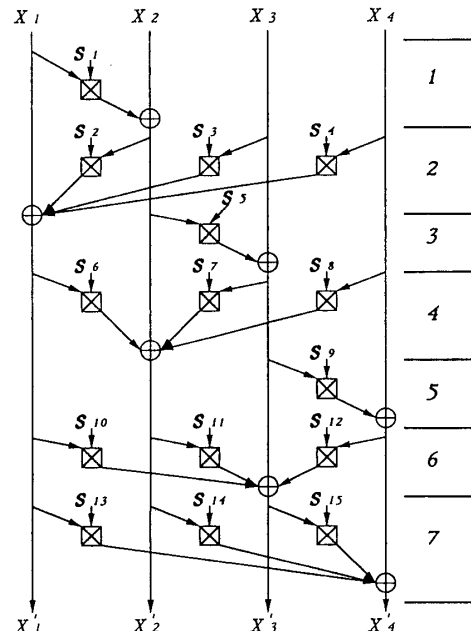


Fig.1. Example of Parallelism

4. まとめ

可逆的座標変換において, 演算過程の並列性について考察し, 基本変換の可換性によって並列演算の可能性が規定されることを示した. 特に, 4 次元の場合には, 15 ステップの演算が 7 ステップに削減されることを明らかにした. レジスタ数の制限をはずした場合にはより並列度を上げることができるが, これは今後の研究課題である.

参考文献

- [1] 志沢: 「N 次元デジタル画像の可逆的幾何変換法」, 情報研究, GCAD, 27-4(1987.7).
- [2] 志沢: 「4 次元同次座標系における可逆的座標変換」, 情報 38 回大会, 4K-5(1989.3).
- [3] O.Wing & J.W.Huang: A Computation Model of Parallel Solution of Linear Equations, IEEE Trans. Comp., C-29, 7, pp.632-638(1980).