5L-5

連立非線形方程式について(2)

熊谷 泰幸　管 正志　平野 菅保
日本大学

1．序

連立非線形方程式

$$F_i(x_1, \cdots, x_n) = 0 \qquad (i=1, \cdots, n) \qquad (1)$$

を解くのによく用いられる解法としては、多変数のニュートン法がある。ニュートン法は、連立非線形方程式（1）をテーラー展開した時に、2次以上の項が無視できるとして、1次の項までで近似し、補正値を計算するものであるが、実際には、1次の項までを用いて計算した補正値を2次以上の項に代入すると、1次の項よりも2次以上の項が無視できない場合があり、このような場合に計算を続行すると近似解が遠い所に“跳ね”てしまい、出発値の近くに解があるにもかかわらず、遠い所にある解に収束したり、あるいは近似解が振動してしまい、解に収束しなかったりする。

そこで、今回は連立非線形方程式（1）をテーラー展開した時に、2次の項までで打ち切り、場合によっては2次の項を用いて、補正値を計算する方法について述べる。

2．解法

連立非線形方程式（1）をx_j（$j=1, \cdots, n$）の点でテーラー展開し、3次以上の項を打ち切る。

$$F_i(x_1+dx_1, \cdots, x_n+dx_n)$$
$$= F_i(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}dx_j\right)^k F_i(x_1, \cdots, x_n) = 0$$
$$(i=1, \cdots, n) \qquad (2)$$

式（2）の2次の項を打ち切った式、n元連立方程式

$$F_i(x_1, \cdots, x_n) + \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}dx_j\right) = 0$$
$$(i=1, \cdots, n) \qquad (3)$$

から計算した補正値dx_j（$j=1, \cdots, n$）を1次の項、2次の項に代入し、大きさを比較する。

$$\max\left(\frac{1}{1!}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_j}dx_j\right|\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2!}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j^2}dx_j^2\right| + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\left|2\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k}dx_j dx_k\right|\right)\right)$$
$$(i=1, \cdots, n) \qquad (4)$$

この時、大きくなった項は無視できないとし、その項が1次なら、そのまま計算を続行するが、その項が2次の時は、次の式より補正値dx_j（$j=1, \cdots, n$）を計算し直す。

$$F_i(x_1, \cdots, x_n) + \frac{1}{2!}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}dx_j\right)^2 F_i(x_1, \cdots, x_n) = 0$$
$$(i=1, \cdots, n) \qquad (5)$$

On a set of nonlinear equations (2)
Yasuyuki KUMAGAI, Masashi SUGA, Sugayasu HIRANO
NIHON, Univ.

３．計算例

具体的な例として、図１の回路の動作点を求める[1]。トンネルダイオードの特性を

$$g_1(v_1)=2.5v_1^3-10.5v_1^2+11.8v_1 \tag{6}$$

$$g_2(v_2)=0.43v_2^3-2.69v_2^2+4.56v_2 \tag{7}$$

と仮定したときの回路方程式は次のように与えられる。

$$f_1(v_1,\ v_2)=30-13.3g_1(v_1)-(v_1+v_2)=0 \tag{8}$$

$$f_2(v_1,\ v_2)=g_1(v_1)-g_2(v_2)=0 \tag{9}$$

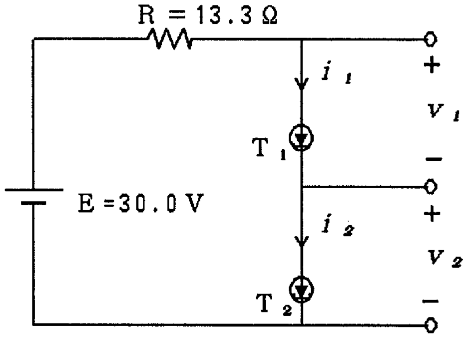

図　　１

まず、ニュートン法で解くことを試みる。出発値として

$$v_1^{(0)}=2.0,\quad v_2^{(0)}=0.8$$

を与える。７回反復計算させたところ、出発値の近くに解があるにもかかわらず、出発値から遠い解

$$v_1^{(7)}=0.2282671$$

$$v_2^{(7)}=0.8286253$$

に収束してしまった。一回目の反復計算で得られた補正値を用いて１次の項、２次の項どちらが無視できないか調べる。

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial v_1}dv_1\right|+\left|\frac{\partial f_i}{\partial v_2}dv_2\right| < \left|\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_i}{\partial v_1^2}dv_1^2\right|+\left|\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_i}{\partial v_2^2}dv_2^2\right| \qquad (i=1,\ 2)$$

この場合は、２次の項の方が無視できないとして、式（８），式（９）をテーラー展開した時の２次の項を用いて、補正値dv_1，dv_2を計算する。

$$-59.85dv_1^2=-5.919983 \tag{10}$$

$$4.5dv_1^2+1.658dv_2^2=-0.5465540 \tag{11}$$

式（１０），式（１１）の定数項の絶対値を比較すると、式（１０）の方が大きいので、式（１０）より補正値dv_1を次のように計算する。

$$dv_1=\pm\sqrt{-5.919983/(-59.85)}=\pm 0.3145054$$

この補正値dv_1を式（１１）に代入し、補正値dv_2を計算する。

$$dv_2=\pm 0.7733753i$$

結局、近似解は４組となる。そのうちの１組は

$$v_1^{(1)}=2.314505,\quad v_2^{(1)}=0.8+0.7733753i$$

である。この近似解を用いて、ニュートン法で計算させたところ、出発値の近くにある解に収束した。

計算結果は次の通りである。

$$v_1^{(7)}=2.305219+1.543140\times 10^{-8}i$$

$$v_2^{(7)}=0.7055551-6.480695\times 10^{-7}i$$

参考文献（１）に示されている解は次の通りである。

$$v_1^{(T)}=2.3055,\quad v_2^{(T)}=0.7056$$

上に示した解の近くの解を次に示す。

$(v_1^{(T)}=1.6663, v_2^{(T)}=0.7393)$，$(v_1^{(T)}=1.7027, v_2^{(T)}=1.8090)$

$(v_1^{(T)}=2.2776, v_2^{(T)}=1.8575)$

４．結論

連立非線形方程式（１）をテーラー展開した時の１次の項、２次の項に２次以上の項より計算した補正値を代入した時、１次の項の絶対値の和より２次の項の絶対値の和の方が大きい場合は、２次の項より補正値を計算した今回の方法により、出発値の近くにある解に一応収束させることができた。

参考文献

（１）奥村，佐伯，木嶋，“区間解析による非線形回路方程式の求解アルゴリズムに関する一考察”，電子通信学会論文誌(A),Vol.J69-A,No4,pp489-496,1986.