離散化関数の計算法(その改良)

5L-4

秦野和郎(愛知工業大学・電子工学科)

1・はじめに、

第37回の本全国大会において筆者らは離散化関数、$\bar{\delta}_i(x), \bar{\tau}_i(x)$の一つの計算法を提案した[1]。その後の考察で、$\bar{\tau}_i(x)$については数値的により安定で、しかも計算の容易な方法を考案したので報告する。

離散化関数は次式で与えられる関数である。すなわち

$$\begin{cases} \bar{\delta}_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(k+x)^i}+\frac{(-1)^i}{(k-x)^i}\right\} & (1) \\ \bar{\tau}_i(x)=\bar{\delta}_i(x)+1/x^i & (2) \end{cases}$$

である。これらの関数は三角補間の誤差[2]、複合多項式による最小二乗近似[3]等を考察する際に現れる。Fourier級数の等間隔離散点に於ける値を計算したり、離散Fourier係数とFourier係数との関係式を導くと現れるのでこの名前とした。

たとえば、十分に滑らかな関数 f(x) に対して、

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f)=\frac{2}{N}\{\frac{1}{2}f(0)+\sum_{r=1}^{N-1}f(\bar{x}_r)\cos j\bar{x}_r+\frac{1}{2}f(2\pi)\} \\ \bar{v}_j(f)=\frac{2}{N}\sum_{r=1}^{N-1}f(\bar{x}_r)\sin j\bar{x}_r \end{cases} \quad (3)$$

により定義される、離散Fourier係数と、Fourier係数、$a_j(f)$, $b_j(f)$との間には

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f)=a_j(f)+\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i}}\bar{\delta}_{2i}(\frac{j}{N})\omega_{2i-1}(f) \\ \qquad +O(N^{-2m-1}) \\ \bar{v}_j(f)=b_j(f)+\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i+1}}\bar{\delta}_{2i+1}(\frac{j}{N})\omega_{2i}(f) \\ \qquad +O(N^{-2m-1}) \end{cases} \quad (4)$$

なる関係がある[1]。また、大きな j に対して

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f)=\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i}}\bar{\tau}_{2i}(\frac{j}{N})\omega_{2i-1}(f)+O(j^{-2m-1}) \\ \bar{v}_j(f)=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i+1}}\bar{\tau}_{2i+1}(\frac{j}{N})\omega_{2i}(f)+O(j^{-2m-1}) \end{cases} \quad (5)$$

が成り立つ[1]。ここで

$$\omega_i(f)=\{f^{(i)}(2\pi)-f^{(i)}(0)\}/\pi \quad (6)$$

であり、

$$\bar{x}_r=2\pi r/N \quad : 0\leqq r\leqq N \quad (7)$$

である。

実逆 FFT により離散Fourier係数を求めて式(4)を適用すれば高精度のFourier係数を得ることができる。

2・離散化関数の計算法、

第37回の全国大会で報告した方法は離散化関数を

$$\bar{\delta}_{2i+1}(x)=-x\cdot\frac{P_{2i+1}(x)}{Q_{2i+1}(x)}, \quad \bar{\delta}_{2i}(x)=\frac{P_{2i}(x)}{Q_{2i}(x)}$$

$$\bar{\tau}_{2i+1}(x)=\frac{1-4x^2}{x^{2i+1}}\cdot\frac{R_{2i+1}(x)}{Q_{2i+1}(x)}, \quad \bar{\tau}_{2i}(x)=\frac{1}{x^{2i}}\cdot\frac{R_{2i}(x)}{Q_{2i}(x)} \quad (8)$$

の形に書いて $P_i(x), Q_i(x), R_i(x)$のべき級数を得ると言うものであった。ここで

$$\bar{\delta}_{i+1}(x)=-\frac{1}{i}\bar{\delta}'_i(x), \quad \bar{\tau}_{i+1}(x)=-\frac{1}{i}\bar{\tau}'_i(x) \quad (9)$$

なる漸化式が成り立つので $P_i(x), Q_i(x), R_i(x)$ について成立する漸化式を導くことができて、それをもとにして$P_i(x)$等の具体的な形を得ることができる。

$\bar{\delta}_i(x)$については、さし当ってこの方法はよい方法であると思う。しかし$\bar{\tau}_i(x)$については次に述べるような、より良い方法がある。

On Calculating with Discretization Functions(It's Improvement)

Kazuo HATANO AICHI Institute of Technology

3・$\bar{\tau}_i(x)$の計算法の改良

文献4)の p.67 に次の公式が与えられている。

$$\bar{\tau}_2(x)=\pi^2\mathrm{cosec}^2\pi x \quad (10)$$

$$\bar{\tau}_3(x)=\pi^3\cot\pi x\cdot\mathrm{cosec}^2\pi x \quad (11)$$

$$\bar{\tau}_4(x)=\pi^4(\mathrm{cosec}^2\pi x-\frac{2}{3})\cdot\mathrm{cosec}^2\pi x \quad (12)$$

これ以上の次数についても漸化式(9)を使って次々にその具体的な形を得ることができる。しかし、上の式からわかるように$\bar{\tau}_4(x)$に既に減算が現れている。このことから、より次数が高くなれば数値的に不安定になると判断して別の方法を提案したのである。

式(12)を sin と cos を使って書き直すと

$$\bar{\tau}_4(x)=\frac{1}{3}(\frac{\pi}{\sin\pi x})^4(1+2\cos^2\pi x) \quad (13)$$

となり以下、順に

$$\bar{\tau}_5(x)=\frac{1}{3}(\frac{\pi}{\sin\pi x})^5\cos\pi x\cdot(2+\cos^2\pi x) \quad (14)$$

$$\bar{\pi}_6(x)=\frac{1}{15}(\frac{\pi}{\sin\pi x})^6(2+11\cos^2\pi x+2\cos^4\pi x) \quad (15)$$

$$\cdots$$

等を得ることができる。これらの式には減算を含んでいない。従って次数がより高くなっても数値的に安定に計算できる可能性がある。すぐ後で述べるようにこの形なら任意の次数に対して減算は含まれない。

式(13)-(15)から $\bar{\tau}_i(x)$ は次の形になると考えられる。

$$\bar{\tau}_{2i}(x)=\frac{1}{(2i-1)!}(\frac{\pi}{\sin\pi x})^{2i}\cdot\sum_{j=0}^{i-1}\bar{c}_{2i,2j}\cdot\cos^{2j}\pi x \qquad : i=1,2,\ldots$$

$$\bar{\tau}_{2i+1}(x)=\frac{1}{(2i)!}(\frac{\pi}{\sin\pi x})^{2i+1}\cdot\sum_{j=0}^{i-1}\bar{c}_{2i+1,2j+1}\cdot\cos^{2j+1}\pi x \qquad : i=1,2,\ldots$$

$$(16)$$

漸化式(9)の第二式を適用すると

$$\bar{c}_{2i+1.2j+1}=\begin{cases}(2i-2j)\cdot\bar{c}_{2i,2j}+(2j+2)\cdot\bar{c}_{2i,2j+2} & : j=0,1,\ldots,i-2\\ 2\cdot\bar{c}_{2i,2i-2} & : j=i-1\end{cases} \qquad : i=1,2,\ldots \quad (17)$$

$$\bar{c}_{2i,2j}=\begin{cases}(2i-2j)\cdot\bar{c}_{2i-1,2j-1}+(2j+1)\cdot\bar{c}_{2i-1,2j+1} & : j=1,2,\ldots,i-2\\ 2\cdot\bar{c}_{2i-1,2i-1} & : j=i-1\end{cases} \qquad : i=2,3,\ldots \quad (18)$$

となる。

$$\bar{\tau}_1(x)=(\frac{\pi}{\sin\pi x})\cos\pi x \quad (19)$$

$$\bar{\tau}_2(x)=(\frac{\pi}{\sin\pi x})^2 \quad (20)$$

であるから

$$\bar{c}_{2,0}=1 \quad (20)$$

である。これを種にして式(17),(18)を交互に適用して行けば式(16)の係数を次々に求めてゆくことができる。この際、式(17),(18)に現れる数は総て正の数のみであるから式(16)の係数は総て正である。従って、式(16)は数値的に極めて安定な式である。

5・おわりに、

ここで提案した方法でも次数 iが大きくなると計算量が多くなる。iが大きいときには定義式(1),(2)を直接計算する方がよいかも知れない。

$$\sum_{k=K}^{\infty}\{\frac{1}{(k+x)^i}+\frac{1}{(k-x)^i}\}<\sum_{k=K}^{\infty}\frac{2}{(k-x)^i}<\frac{2}{(i-1)(K-1/2)^{i-1}}$$

である。従って i=13で 10^{-16}程度の精度ならK≒19となるので、式(1),(2)の最初の 18項程度を計算すればよい。

式(4)を使って高精度のFourier係数を計算する際に離散Fourier係数を FFTで早く計算しても離散化関数の計算に時間がかかっては具合いが悪い。改良が望まれる。

参考文献

1) 秦野和郎:離散化関数の計算法，第37回情報処理学会全国大会論文集，5D-1(1983).

2) 秦野和郎:三角補間の誤差解析，情報処理学会論文誌，Vol.30, No.2, pp.150-158(1989).

3) 秦野和郎:複合多項式による最小二乗近似，情報処理学会論文誌，Vol.30, No.6, (1989).

4) 森口繁一、宇田川かね久、一松信:数学公式II、岩波全書229、岩波書店(1961).