最短路問題における中継効果に関しての考察

3L-5

加藤 常員
岡山理科大学

1. はじめに

最短路問題は、ネットワークフローの基礎問題として多くの研究がなされてきた。また、ネットワークに関連した諸分野において、最短路問題は部分問題として応用・議論されてきた。最短路問題が応用されるとき、ネットワークの各辺に付与されている重みは、距離、時間、運賃、負担など、個々に具体的な意味をもつ。具体的な意味をもつ重みは、しばしば基準となる量と対応する(関係をもつ)重みとして与えられる。例えば、路線距離と運賃や路線距離と所要時間などが考えられる。具体的な意味をもつ重みでの最短路は、基準となる量に対しての重みの関係が変れば最短路も変る可能性をもっている。例えば、運賃体系が変れば最小運賃経路が変ることが考えられる。このような最短経路の変化は、いくつかの頂点を経由(中継)することにより生じるものである。

筆者は、上述のような中継による最短路の変化を中継効果と名づけ、各辺に与えられた基準量(重み)を単調増加な凸関数により変換した値を新たな重みとした場合の中継効果が生ずることをすでに報告した[1,2]。本報告では、非負な実数値を重みとするネットワークにおいて、各辺に与えられた基準量(重み)を具体的な凸関数: $f(W)=W^n$により変換した値を新たな重みとした際の中継効果の局所的な諸属性について考察を行う。

2. 中継効果

本稿では、各辺 $e\in E$に非負な実数値の重み: $w(e)$ が付与された無向グラフ $G=(V,E)$のネットワークに限定して論ずる。最短路を求める算法[3]は、重みに関しての3項関係の判定が中心的な振舞をする。このことより、上述の重みの変化による最短経路の変化(中継効果)についての考察は、3頂点間の重みの変化について吟味・検討すればよいと考えられる。前章で述べた中継効果を定式化すると次のようなる。

3頂点a、b、cが与えられ、辺(a,b)、(a,c)、(b,c)が存在し、各辺に付加された重み w_{ab}、w_{ac}、w_{bc}が

$$w_{ac}<w_{ab}+w_{bc} \qquad (1)$$

を満たすとき、適当な変換(関数) fを用いると

$$f(w_{ac})>f(w_{ab})+f(w_{bc}) \qquad (2)$$

となることがある。

$f(W)$が、非負の実数を定義域、値域とする単調増加な狭義の凸関数であるとき、式(2)の成立、不成立は、比較対象となる3辺の重みの比と $f(W)$ の増加性に大きく依存する[2]。比較可能なすべての3辺の重みの比に対して $f(W)$ の増加性が、十分に大きいとき、式(2)は、常に成立つ。一方、凸関数の条件を弛め $f(W)=W$とした とき中継効果は、すべての3辺の重み間において起こらない。また、適当な増加性をもつ凸関数を採用した際には、比較可能な3辺の重み間の一部についてのみ中継効果が成立する。

3. $f(W)=W^n$を用いたときの中継効果の諸属性

本章では、重み変換に用いる関数として、単調増加な狭義の凸関数 $f(W)=W^n$を用いたときの中継効果について局所的な諸属性を考察する。記号等の定義は、前章のものにしたがうが、議論を簡単化するため、一般性を失わないように次のパラメータα、βを導入する。

$$\left.\begin{aligned} w_{ab}&=\alpha\, w_{ac} \\ w_{bc}&=\beta\, w_{ac} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} 0<\alpha<1 \\ 0<\beta<1 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ここでは、α、βの大小関係は問わない。式(1)はα、βを用いると、つぎの様に示せる。

$$1<\alpha+\beta \quad . \qquad (5)$$

(a)重みの比と関数の増加性

中継効果が辺に付加されたの重みの比と関数の増加性に依存することを示す。$f(W)=W^n$の増加率は、明らかに nのみに支配される。一般的な議論[2]にもとづき式(2)が成立つとすると

$$w_{ac}{}^n>w_{ab}{}^n+w_{bc}{}^n \qquad (6)$$

パラメータα、βを用いると、

$$1>\alpha^n+\beta^n \qquad (7)$$

となり、式(7)の右辺について $n\to\infty$での極限値は、0である。$n\to\infty$において式(7)は、常に成立つ。また、式(7)がα、β、nのみの関係式であることから、辺の重みの比(重みの大きさには係わらない)と nのみの関係を見極めることで中継効果の有無を判定できると言える。

(b)迂回範囲

重みにユークリッド距離を用いて、頂点 a、c(重み w_{ac})と nを固定したときの式(7)が成立する頂点 bの存在領域を検討する。図1に示すようにXY直交座標系を

A Study on the Junction Effect of a Shortest Path Problem .
Tunekazu KATO
Okayama University of Science

設定し、頂点 a を原点、c をX軸上に採り、頂点 b の座標を(x、y)、対称性を考慮して∠ bac を $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ で表すとする。

頂点 b の座標を(x、y)は、

$$\left.\begin{aligned} x &= w_{ab}\cos\theta \\ y &= w_{ab}\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

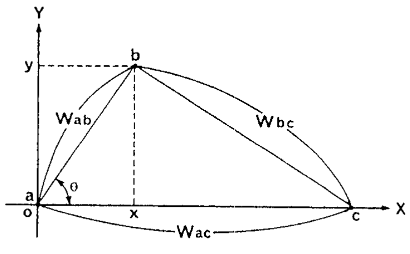

図1.頂点の直交座標系

で、余弦定理により

$$\cos\theta = \frac{w_{ac}^2 + w_{ab}^2 - w_{bc}^2}{2\, w_{ac} w_{ab}} \quad (9)$$

となる。よって、頂点 b の存在範囲の座標は、式(7)の関係より

$$\left.\begin{aligned} x &< \frac{W_{ac}}{2}\{1+\alpha^2-(1-\alpha^n)^{2/n}\} \\ y &< \pm\frac{W_{ac}}{2}(4\alpha^2-\{1+\alpha^2-(1-\alpha^n)^{2/n}\}^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

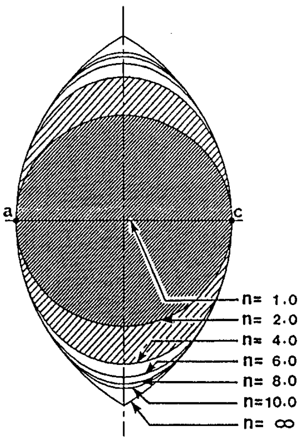

図2.迂回領域

を得る。式(10)は、逆に式で表された範囲に頂点 b が存在するならば a から c への経路は、b を迂回することを示している。中継効果を起こす頂点 b の存在範囲を迂回領域と呼ぶ。図2に $w_{ab}=1$ で $n=$ 1.0,2.0,4.0,6.0,8.0,10,0および∞のときの迂回領域を示す。

(c)重み変化率

重みにユークリッド距離を用いて、頂点 a、c (重み w_{ac})と n を固定しとき、中継効果により採択された経路の重みが、最大どの程度増加するかについて検討する。中継効果は、先の検討で示したように、重みの比と n が重要な振舞をする。ある n ともとで重み w_{ab}、w_{bc}、w_{ac} の間に丁度、中継効果が起きるとする。このとき採択される経路 $a\rightarrow b\rightarrow c$ の重みともとの経路 $a\rightarrow c$ の重みの差をもとの経路の重みで除した値を n、α に対する重み変化率と名づける。すなわち、

$$d = \frac{w_{ab} + w_{bc} - w_{ac}}{w_{ac}} \quad . \quad (11)$$

重み変化率 d は、ac 間の部分路に対する増加性を示す n に関しての中継効果の評価になっていると言える。重み変化率を中継効果の最短路に対する評価関数 $d_{(n,\alpha)}$ として、式(11)と式(7)の関係を等号に置き換えた関係を用いて、

$$d_{(n,\alpha)} = \alpha + (1-\alpha^n)^{1/n} - 1 \quad (12)$$

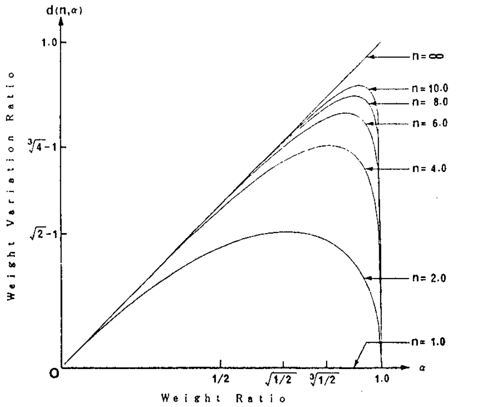

図3.重み変化率

と表される。図3は、縦軸に評価関数 $d_{(n,\alpha)}$ の値(重み変化率)、横軸に重みの比 α を採り、$n=1.0$、2.0、4.0、6.0、8.0、10.0および∞としたときのグラフである。

(d) n に対する路についての重み変化率の上界値

$d_{(n,\alpha)}$ は、$\alpha = 2^{(-1/n)}$ で最大値 $2^{((n-1)/n)}-1$ を持つ。このことは、ネットワークが与えられたとき、中継効果によって得られた、最短路は、真(n = 1 のとき)の最短路に対し、高々

$$d_{(n,\, 2^{-1/n})} = 2^{(n-1)/n} - 1 \quad (13)$$

増しの重みになることを意味する。すなわち、この値は、n に対する中継効果の路についての重み変化に関しての上界値となっている。

4.おわりに

本稿では、各辺に付加された重みが非負な無向のネットワークにおいて、各辺に与えられた基準量(重み)を $f_{(w)} = w^n$ により変換した値を新たな重みとした場合の最短路の変化(中継効果)について、基本的な4つの考察を述べた。これら4つの考察は、局所的なものである。したがって、最短路全体やある頂点を始点、他のすべて頂点を終点とする最短路がどのように求まるかは、さらに検討を要する($n=\infty$ のとき、最小木と一致する[2])。今後の課題としては、重みを変換した際の最短路全体と真の最短路全体との関係を明らかにすることが望まれる。また、より一般的な凸関数や凸関数でない場合についての振舞、特殊なネットワークに対して中継効果がどの様に作用するか理論的に押える必要がある。

なお、本研究の一部は、文部省科学研究費補助金(奨励研究(A)No.63790435)によった。

参考文献

(1) 加藤、小林、小沢、今枝:伝播負担関数による文化の伝播路の抽出、情処論、Vol.29、No.4、pp418-428(1988).

(2) 加藤 常員:凸関数により重みを変換した際の最短路問題に関する一考察、38回情処全大、pp.75-76(1989).

(3) M.L.Fredman,R.E.Tarjan:Fibonacci Heaps and Their Uses in Improved Network Optimization Algorithms, Proc. 25th Ann. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci. pp338-346(1984).