2L-3

強い否定を含む構成的論理によるPROLOGの定式化とLISPに基づくそのメタ論理

清水　智
いわき短期大学

1．はじめに　本研究は論理プログラミングを代表する論理型言語Prologが強い否定を（Strong Negation）を含む構成的論理の枠内で定式化されることを証明し，さらに，この構成的論理のメタ論理が関数型言語Lispを利用して与えられることを示し、PrologとLispの間の関連性の論理的意義づけを行うことを目的とする．

強い否定を含む構成的論理はNelson [5] に始まり，その後，Markov, Vorob'cv, Zaslavskiといったソ連の研究者を中心に受け継がれ現在に至っている．

～ で表される強い否定は，一般に排中律を満足しないだけでなく，矛盾律も満足しない．しかし，直観主義的否定（intuitionistic negation）と異なり，ド・モルガンの法則は満足する．また，直観主義的否定がこの強い否定と含意を用いて$A \supset \sim A$，として定義されることも知られている（Markov [4] ）．

2．定式化の準備　強い否定を含む（否定としては強い否定のみを含む）一階の構成的論理のゲンツェン式定式化は，次のとおりである．

推論規則：

$$\wedge\to \ \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, A\wedge B, \Gamma_2 \to \Delta}\ ,$$

$$\to\wedge \ \frac{\Gamma\to \Delta_1, A, \Delta_2 \quad \Gamma\to \Delta_1, B, \Delta_2}{\Gamma\to \Delta_1, A\wedge B, \Delta_2}\ ,$$

$$\vee\to \ \frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \to\Delta \quad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \to\Delta}{\Gamma_1, A\vee B, \Gamma_2 \to \Delta}\ ,$$

$$\to\vee \ \frac{\Gamma\to A}{\Gamma\to \Delta_1, A\vee B, \Delta_2}\ ,$$

$$\to\vee \ \frac{\Gamma\to B}{\Gamma\to \Delta_1, A\vee B, \Delta_2}\ ,$$

$$\sim\wedge\to \ \frac{\Gamma_1, \sim A, \Gamma_2 \to\Delta \quad \Gamma_1, \sim B, \Gamma_2 \to\Delta}{\Gamma_1, \sim(A\wedge B), \Gamma_2 \to \Delta}\ ,$$

$$\to\sim\wedge \ \frac{\Gamma\to \sim A}{\Gamma\to \Delta_1, \sim(A\wedge B), \Delta_2}\ ,$$

$$\to\sim\wedge \ \frac{\Gamma\to \sim B}{\Gamma\to \Delta_1, \sim(A\wedge B), \Delta_2}\ ,$$

$$\sim\vee\to \ \frac{\Gamma_1, \sim A, \sim B, \Gamma_2 \to\Delta}{\Gamma_1, \sim(A\vee B), \Gamma_2 \to \Delta}\ ,$$

$$\to\sim\vee \ \frac{\Gamma\to \Delta_1, \sim A, \Delta_2 \quad \Gamma\to \Delta_1, \sim B, \Delta_2}{\Gamma\to \Delta_1, \sim(A\vee B), \Delta_2}\ ,$$

$$\sim\sim\to \ \frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, \sim\sim A, \Gamma_2 \to \Delta}\ ,$$

$$\to\sim\sim \ \frac{\Gamma \to \Delta_1, A, \Delta_2}{\Gamma \to \Delta_1, \sim\sim A, \Delta_2}\ ,$$

$$\sim\to \ \frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Delta_1, A, \Delta_2}{\Gamma_1, \sim A, \Gamma_2 \to \Delta_1, \Delta_2}\ ,$$

$$\forall\to \ \frac{\Gamma_1, A(t), \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, \forall x\, A(x), \Gamma_2 \to \Delta}\ ,$$

$$\to\forall \ \frac{\Gamma \to A(b)}{\Gamma \to \Delta_1, \forall x\, A(x), \Delta_2}\ ,$$

$$\sim\forall\to \ \frac{\Gamma_1, \sim A(b), \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, \sim\forall x\, A(x), \Gamma_2 \to \Delta}\ ,$$

$$\to\sim\forall \ \frac{\Gamma \to \Delta_1, \sim A(t), \Delta_2}{\Gamma \to \Delta_1, \sim\forall x\, A(x), \Delta_2}\ .$$

以上の推論規則の他に，∃に関する規則，⊃（含意）に関する推論規則も存在するが，これらの論理記号は，subformula propertyによりPrologの導出においては用いないで済ますことができるので，ここでは取り上げない．さらに，いくつかの構造規則も必要である．

公理：

$$\Gamma_1, A, \Gamma_2 \to \Delta_1, A, \Delta_2,$$

という形のsequentである．（詳細については，Ishimoto [2] ,清水 [6] を参照されたい．）

3．Prologの定式化　以上述べた強い否定を含む構成的論理において，Prologの導出の過程は次のように定式化される（ただし，今回はunificationについては対象とせず取り上げていないが，これについては別の機

The formulation of Prolog by constructive logic with strong negation and its meta-logic based on Lisp
Satoshi SHIMIZU
Iwaki Junior College

会に譲りたい）．

3.1 $\Gamma \to A \vee \sim B_1 \vee \cdots \vee \sim B_n$ （$0 \leqq n$），

ただし，Γはgoal statement（導出される式の否定），factならびにruleの連鎖である．Γ（左辺）に含まれているruleは，最初右辺のruleと同じものであるので，この段階で，3.1は公理である．

3.2 $\Gamma \to B_m \vee \sim C_1 \vee \cdots \vee \sim C_l$ （$0 \leqq l$），

も同様に，最初の段階で公理である．

～→とcut を用いると，

3.3 $\Gamma,\ B_m \to A \vee \sim B_1 \vee \cdots \sim B_{m-1} \vee \sim B_{m+1} \cdots \vee \sim B_n$ （$1 \leqq m \leqq n$），

が得られるが，3.2と3.3からcutによって，

3.4 $\Gamma \to A \vee \sim B_1 \vee \cdots \sim B_{m-1} \vee \sim B_{m+1} \cdots \vee \sim B_n \vee \sim C_1 \vee \cdots \vee \sim C_l$,

が求められる．これは，Prologの意味におけるlush resolutionに他ならない．このような操作を続けていくと，最後には，

3.5 $\Gamma_1, \sim G \ \to$,

に到達する．ただし，$\Gamma = \Gamma_1, \sim G$で，～Gはgoal statementである．3.5より，

3.6 $\Gamma_1 \ \to \ G$,

が求められる．これは，Gが原子式（atomic formula）である場合には，3.5の証明の長さに関する帰納法によって証明されるが，一般には，必ずしも成り立たない．ただし，Prologで用いられるG（正のリテラルの連言かその存在記号による量化）の場合には必ず成立する．（なお，Tärnlund [7] が指摘したように，～（強い否定）を直観主義的否定と考えると，このことは一般にはいえない．）

これで，Prologの導出が強い否定を含む構成的論理で処理できることがわかった．

さらに，失敗としての否定（negation as failure）をこの定式化の中に組み入れることも可能である．

4．Lispとの関連

以上述べた構成的導出をLispと関連づけるためには，強い否定を含む構成的論理に対してGöedelizationによるメタ論理化を行わなければならない．ただし，自然数によるGöedelizationではなく，S-表現によるGöedelizationである．（Göedelizationについては，Göedel [1]，Kleene [3] などを参照されたい．）

Göedelization が与えられると，proofという帰納的述語が定義される．すなわち，proof(a,b)は，S-表現aは式Bの証明であるという意味である．

この定義に基づいて，Nelson [5] の意味におけるP（肯定的）-realizabilityとN（否定的）-realizability が次のように定義される．

4.11 a P-realizes B =df Proof(a,b),

4.12 a N-realizes B =df Proof(a,b').

ただし，b'は～Bの証明に対応するS-表現である．（なお，このrealizabilityはNelson [5] などによるrealizabilityよりもhierachyが著しく低いrealizabilityであることを注目されたい．）

このようにして定義されたrealizabilityは，A∨BをrealizeするS-表現から，A，あるいはBをrealizeするS-表現がeffectiveに復元できるといった構成的論理に要請される性質をすべて満足している．

PrologとLispの間の関連性を獲得するために，BがPrologにおいて導出されるとしよう．すると，Proof(a,b)を満足するS-表現が存在するかどうかを探し出す必ずしも帰納的でない関数をLispの枠内で定義することができる．

参考文献

[1] Göedel,K., Über Formal Unentschidbara Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, Montsh für Math. und Phys., vol.38(1931).

[2] Ishimoto,A., A Schütte-type Formulation of the Intuitionistic Formulation Calculus with Strong Negation, Bulletin of the Tokyo Institute of Technology, vol.100(1970), pp161-189.

[3] Kleene,S.C., Introduction to Meta-Mathematics, North-Holland.

[4] Markov,A.A., A Constructive Logic (in Russian), Uspehi Mathematiceskih Nauk, vol.5 (1950), pp.187-188.

[5] Nelson,D., Constructive Falsity, The Journal of Symbolic Logic, vol.14(1949), pp.16-26.

[6] 清水　智，強い否定を含む構成的命題論理について，いわき短期大学紀要，第9号（1984），PP.79-94.

[7] Tärnlund,S., Programming Language based on a Natural Deduction System, UPMAIL technical report, No.6(1981).