1H-7

ShortTimeDFT時間域Hilbert変換の提案

岸　政七，　齊木利成

愛知工業大学　情報通信工学科

1.まえがき　Hilbert変換は無線通信の分野において狭帯域変調方式として有効性が示されているSSB，RZ－SSB等を実現するために不可欠な基本機能である。本稿では瞬時スペクトラムという新しい概念を導入しているShortTime DFT Hilbert変換[1]（ST－DFT Hilbert変換）において，時間域→周波数域およびその逆の操作を不要とし時間域上の処理のみで等価な処理を可能とするST－DFT時間域Hilbert変換について検討した。

2.ST－DFT Hilbert変換　ST－DFT時間域Hilbert変換を述べる前に，従来のST－DFT Hilbert変換の概要を説明する。ST－DFT Hilbert変換の処理は3つの部分に大別される。第1は入力の時間域信号にST－DFTを施して周波数領域に展開する部分であり，第2は得られた周波数成分に対してHilbert変換の核心となるπ/2<rad>の位相回転を与える部分，そして第3はその新たな周波数成分にShort Time IFT（ST－IFT）を施すことにより再び時間領域に合成する部分である。処理量を軽減するためには，間引き・補間し第1，第2の処理を毎サンプルからRサンプル毎に減少する事も可能である[2]。さらに第1の処理にFFTアルゴリズムを適用したShortTime FFT Hilbert変換（ST－FFT Hilbert変換）などが提案されている[3]。これらは理想的な応答特性を有するが何れの場合にも複素演算を前提とした周波数スペクトラムの解析が必要である。

3.ST－DFT時間域Hilbert変換の原理　ST－DFTの各々の処理が線形であることに着目すれば時間域上のみで処理を行うことができる。理論展開を容易にするために，ST－FFT Hilbert変換に間引き・補間を用いた場合の処理を考える。ST-FFT Hilbert変換は式(1)～(9)に示すことができ，その処理概要は図1.に示される。今，時刻nにおける入力信号及び位相回転を与えた瞬時スペクトラムをx(n)，Φ(n)とする。$\hat{S}_k(r)$ は式(3)に示す様にサンプル時刻Rごとに求めた周波数成分とする。これらはそれぞれ式(1)～(3)に与えられる。

$$\Phi(n)=[\hat{\phi}_0(n)\ \ \hat{\phi}_1(n)\ \cdots\ \hat{\phi}_{N-1}(n)]^T. \quad (1)$$

$$\hat{S}_k(r)=\sum_{m=0}^{N-1} x_m(n)\hat{W}_N^{-mk}. \quad (2)$$

$$\hat{S}_k(r)=\hat{\phi}_k(rR). \quad (3)$$

ただし，

$$x_m(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n+lN+[m-n]_N)\,h(-lN-[m-n]_N). \quad (4)$$

ここに，

Nは1フレーム内サンプル数.

$\hat{W}_N^{-mk}$はHilbert変換演算子.

h(n)はウィンド関数．但し次の条件を満たす．

$$h(mN)=\begin{cases}1, & \text{if } m=0.\\ 0, & \text{if } m=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots.\end{cases} \quad (5)$$

$$[M]_N=M \bmod N. \quad (6)$$

$\hat{S}_k(r)$以外の間引かれたスペクトラム$\hat{\phi}_k(n)$はRサンプル時刻ごとに得られているQ個のスペクトラム$\hat{S}_k(r)$から補間推定する。シャノンの標本化定理よりR≦Nの範囲においては，情報の欠落なく推定が可能である。すなわち，

$$\hat{\phi}_k(n)=\sum_{r=L^-}^{L^+} f(n-rR)\,\hat{S}_k(r). \quad (7)$$

$$L^-=[n/R]-Q/2+1,\ \ L^+=[n/R]+Q/2. \quad (8)$$

[*]は*を越えない最大の整数.

f(n)はInterpolation関数.

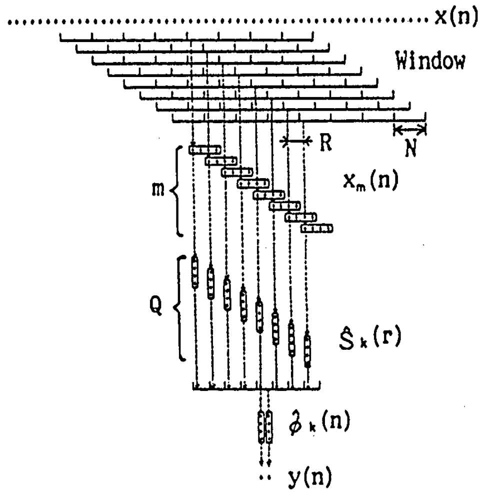

図1.ST-DFT Hilbert変換の処理概要

A Proposal of Short Time DFT Time Domain Hilbert Transformers

Masahichi KISHI, Toshinari SAIKI

Aichi Institute of Technology, Department of Information Network Engineering

推定したスペクトラム$\hat{\Phi}(n)$に対応する出力信号$y(n)$は,式(9)の様にＳＴ－ＤＦＴの逆変換(ＳＴ－ＩＦＴ)で与えられる。

$$y(n)=(1/N)\sum_{k=0}^{N-1}\hat{\Phi}_k(n)W_N^{kn}. \tag{9}$$

ＳＴ－ＦＦＴ Hilbert変換における第１,第２及び第３の部分，そして間引き・補間の全ての処理は線形であるため,間引き・補間における第１,第２及び第３の部分を独立して実施するのではなく，補間とＳＴ－ＩＦＴの順序の入れ換え第１～第３のＳＴ－ＤＦＴ,ＳＴ－ＩＦＴを合成積として実行する事を考える。先ず式(9)に式(7)を代入し次のように変形する。

$$y(n)=(1/N)\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_{r=L^-}^{L^+}f(n-rR)\hat{S}_k(r)\right\}W_N^{kn}$$

$$=\sum_{r=L^-}^{L^+}f(n-rR)\hat{s}_n(r). \tag{10}$$

ここに,

$$\hat{s}_n(r)=(1/N)\sum_{k=0}^{N-1}\hat{S}_k(r)W_N^{kn}. \tag{11}$$

補間とＳＴ－ＩＦＴの順序を入れ換えることによりＳＴ－ＤＦＴを周波数域上でのHilbert変換を同時に行うことすら可能となる。式(11)に式(2)を代入すれば,次の様になる。

$$\hat{s}_n(r)=(1/N)\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_{m=0}^{N-1}x_m(rR)\hat{W}_N^{-mk}\right\}\hat{W}_N^{kn}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_m(rR)\tilde{W}_N^{mn}. \tag{12}$$

ここに,

$$\tilde{W}_N^{mn}=(1/N)\sum_{k=0}^{N/2-1}2\sin\{2\pi k(n-m)/N\}. \tag{13}$$

$$\hat{s}_m(r)=\hat{x}_m(rR),\quad \text{if}\quad m=n \bmod N. \tag{14}$$

ただし$x_m(n)$は$\hat{x}_m(n)$をHilbert変換したもの.

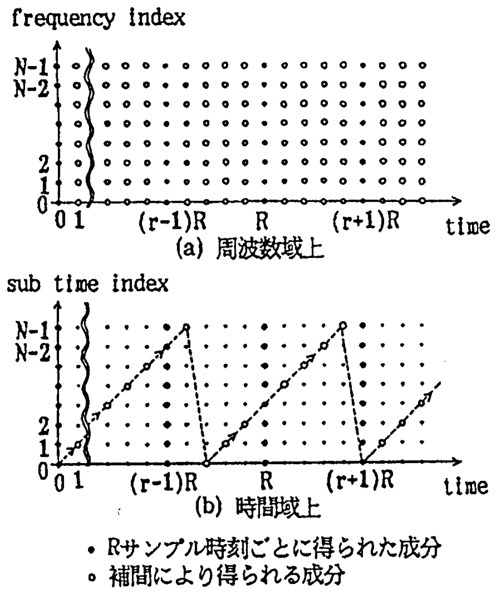

図2.Interpolation の概要

$x(n)$と$x_m(n)$ の関係は次式で示される。

$$x_m(n)=x(n),\quad \text{if}\quad m=n \bmod N. \tag{15}$$

$x(n)$をHilbert変換した出力を$\hat{x}(n)$ とすれば，出力 $y(n)$ は次のように与えられる。

$$y(rR)=\hat{s}_{m'}(r),\quad \text{if}\quad m=rR \bmod N. \tag{16}$$

ここに,

$$\hat{s}_m(r)=\hat{x}(rR),\quad \text{if}\quad m=rR \bmod N. \tag{17}$$

上式ではＲサンプル時刻ごとの出力を与えるものであり，Ｒ毎時外の時刻に対応する出力$y(n)$ $n\neq rR$は式(10)の補間から正しく与えられる事が理解できよう。

4.処理概要　式(10)に示す時間域上での補間は各サンプル時刻において１成分についてのみ行えばよく，図2.に示す様な関係が存在する。ＳＴ－ＤＦＴ Hilbert変換の時間域上処理は次のように簡潔に表現でき，そのフローは図3.に示す様に求まる。

$$\hat{s}_n(r)=\sum_{m=0}^{N-1}x_m(n)\tilde{W}_N^{mn}. \tag{18}$$

$$x_m(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(n+lN+[m-n]_N)h(-lN-[m-n]_N) \tag{19}$$

$$\tilde{W}_N^{mn}=(1/N)\sum_{k=0}^{N/2-1}2\sin\{2\pi k(n-m)/N\}. \tag{20}$$

$$y(n)=\sum_{r=L^-}^{L^+}f(n-rR)\hat{s}_n(r). \tag{21}$$

5.あとがき　以上の様に，時間域上処理のみによって実行が可能であるＳＴ－ＤＦＴ時間域Hilbert変換が得られた。このＳＴ－ＤＦＴ時間域Hilbert変換は周波数域上に展開する必要がないため構成が簡潔なものとなり，また実数演算のみで処理されるので演算量の削減も可能となる。

【文献】

[1] M.Kishi:"A proposal of short time DFT Hilbert transformers and its configuration", Trans.IEICE,E51,5,pp466-468,(May 1988).
[2] 石川,伊藤,齊木,岸,昭和63年東海連大,No.416
[3] 古賀,齊木,岸,昭和63年東海連大,No.422

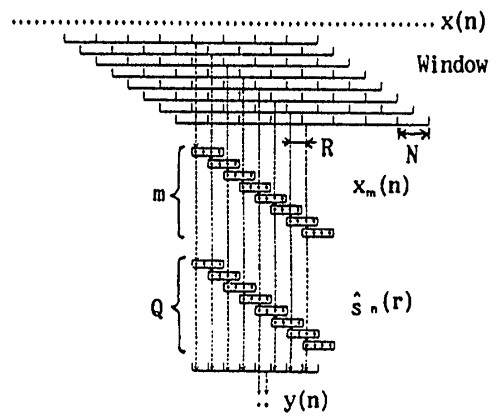

図3.時間域ST-DFT Hilbert変換の処理概要