

平面幾何問題における補助線自動生成

3F-7

山崎 大・飯田善久

(成蹊大学 工学部)

1. まえがき

平面幾何問題解法において、図形に補助線を導入する場合がある。この種の問題を不慣れな人が解く場合、どのように補助線を引けば問題解決に有用であるかを判断するのに手間取り、有効な補助線を引くのに時間がかかる。しかし、慣れた人が解く場合、図形の特徴や今までの経験を利用してすばやく、有効な補助線を引くことが出来る。計算機を用いて解く場合においても、図形の特徴や補助線に関する知識を利用すれば、有効な補助線をすばやく引くことが可能になると考えられる。本稿では、平行線の性質を利用した補助線を用いて、中学生レベルの平面幾何問題を解くことを試みた。

2. 知識と推論

2.1 平面幾何定理

中学生レベルの平面幾何問題を約130題について調べた結果、特に重要であると思われる、対頂角の性質、平行線の性質(錯角・同位角)、三角形の合同条件・相似条件および、証明に必要な様々な規則(角・辺の共通など)、比の計算に必要な連比を知識として利用する。

2.2 補助線に関する知識

中学生レベルの平面幾何問題で生成される補助線は特定の線分に対して平行線を引く場合が大部分であるので、これを知識として利用する。図1はその方法を示している。点Pより線分ACに対して平行線P_{new}を引く。これにより、 $\triangle ABC$ の $\triangle PB_{new}$ などの事実が得られ、新しい図形を利用して問題解

決を試みる。

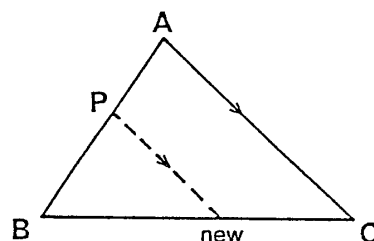


図1 平行線を利用した補助線の特徴

しかし、引いた補助線が必ず問題解決につながるとは限らず無駄な補助線を引くことが考えられる。すなわち、補助線を引いても新事実が追加されなければ、結局は証明が不可能になりバックトラックをし、他の補助線を引くことになる。このようなことから、初めから無駄な補助線を引かないように、有効な補助線であるかをチェックする必要がある。例えば、図2のような図形において線分CDに平行線MPを引いたとき線分CD以外に平行線があるかどうかを調べる。この場合、線分DBと線分CBが存在しておりこれらが後の推論に有効である可能性がある。しかし、このような線分が存在しない場合は補助線を引いても新しい事実が追加されないのであらかじめ、無駄な補助線として排除するようにしている。(図2の例では、Mから線分ABに平行な補助線がそれに該当する。)

2.3 図形の認識

図形に補助線を引いた時、交点が線分のどの位置にくるかを、調べなくてはならない。例えば、図2のような図形において、点Mより線分CDに対して平行線MPを引いた時、交点Pは必ず線分ANの間にくる。これは、

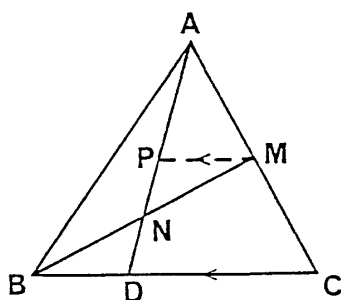


図2 交点の位置関係

人間が交点を決定する際、図形全体を見て交点の位置を判断していると考えられる。このようなことを計算機に行わせる場合も、人間と同じようにあらかじめ、図形の認識をする必要がある。そこで、解かせたい図形を入力すると、その図形がどのような特徴をしているかをパターンマッチングを利用して認識する。

これにより、図形内の交点がどの位置にあるのかを判断し、補助線と線分との交点が正しい位置に決定出来るようにしている。

2.4 推論方法

証明方法は、まず与えられた図形だけを用いて後向き推論を行う。ここで、証明不可能の時は、2.2節で述べた補助線の知識を利用して図形に線分を引く。そして新しい図形を用いて、後向き推論を行い結論に到達する。

3. Prologによるインプリメンテーション

補助線を利用して解く平面幾何問題において、2節で述べた補助線の知識、平面幾何定理、図形の認識をPrologを用いて計算機にインプリメントした。ここでは、補助線に関する知識と図形の認識に関する一部をPrologで表現したものを図3、図4に示す。

```
support([A, B, C, D, R1, R2]) :-
    ratio1(line([A, B]), line([B, C]), R1, R2),
    line([A, B, C]), line([C, D]),
    not(A==D), not(B==D),
    makefigure([A, B, C, D, R1, R2]).
makefigure([A, B, C, D, R1, R2]) :-
    有効な補助線かのcheck,
    assert(新しく得られた事実).
```

図3 補助線の知識

```
recog:-
    line([A, B, C]),
    ratio1(line([A, B]), line([B, C]), R1, R2),
    line([A, D, E]),
    not(C==E), not(B==D),
    ratio1(line([A, D]), line([D, E]), R3, R4),
    line([E, F, B]),
    not(D==F),
    line([D, F, C]),
    recog1(B, C, D, E, F),      交点Fの位置決定
    recog2(A, B, C, R1, R2),   交点Bの位置決定
    recog3(A, D, E, R3, R4),   交点Dの位置決定
    recog1(B, C, D, E, F) :-
        retract(line([E, F, B])),
        assert(line([E, F, B], right)),
        retract(line([D, F, C])),
        assert(line([D, F, C], left)).
```

図4 図形の認識

4. 実行結果

2節で述べた知識をPrologによりVAX 8200上にインプリメントした。インプリメントした規則、定理の数は30である。平面幾何問題において、補助線を引くことは難しいとされているが、中学生レベルの三角形に関する問題では、本稿で述べた方法により補助線を引き解けることがわかった。

5. むすび

例えば円に関する問題では平行線以外にも有効な補助線がいくつも存在しているので、これらの補助線についても検討中である。

<謝辞>

日頃、御指導頂いている、武田 紀子助手に深く感謝致します。

<参考文献>

- [1] 諏訪, 元田: 補助線問題における学習, 情報処理学会・知識工学と人工知能研究会報告, 56-12 (1981)
- [2] 里野: 高校への数学, 東京出版, 86-11 (1986)