7B-3

微分方程式境界値問題の一近似求解法

増田英彰・磯部豊作
(芝浦工業大学)

1．はじめに

本研究は、常微分方程式の二点境界値問題〔TPBVP〕の欠落初期値、未知終端値求解の一手法として、酔歩の問題が、本TPBVPに対する「不変埋め込み法」の中に使われる基礎偏微分方程式と同形に変形出来ることを利用し、確率論的に、近似求解することを提案し、その概要を二階常微分方程式について報告するものであります。

2．求解法

Random Walk における速度確率を$Q(x,t)$とし、xを位置、hを1stepの歩みの距離、時刻tを刻みλで表し、$t=n\lambda$ $(n=0,1,2\cdots;$ $t_f-t_0=m\lambda)$ とし、p,q は、それぞれ $t-\lambda$ 時に、$x-h, x+h$ 点から x 点に移る確率とし、$p+q=1$ とする時、$Q(x,t)$は、

$$Q(x,t)=pQ(x-h,t-\lambda)+qQ(x+h,t-\lambda)\cdots(1)$$

で表される。〔1〕　これを次の如く変形する。

$$Q(x,t)=p\left[Q(x,t)-hQ_x(x,t)-\lambda Q_t(x,t)+\Delta_1\right]$$
$$+q\left[Q(x,t)+hQ_x(x,t)-\lambda Q_t(x,t)+\Delta_2\right]$$

これより、

$$\frac{p\Delta_1+q\Delta_2}{\lambda}=(p-q)\frac{h}{\lambda}Q_x(x,t)+Q_t(x,t)$$

今

$$(p-q)\frac{h}{\lambda}\triangleq f(X,Q(X,t),t)=\frac{dX}{dt}(=Q(X,t))$$

〔X=x+確率的変位量〕

$$f(X,Q(X,t),t)Q_x(X,t)+Q_t(X,t)$$
$$\triangleq g(X,Q(X,t),t)=\frac{dQ(X,t)}{dt}\qquad\cdots(2)$$

とすると、次の関係式を得る。

$$\frac{dX}{dt}=f(X,Q(X,t),t)\quad(=Q(X,t))$$
$$\frac{dQ}{dt}=g(X,Q(X,t),t)\qquad\cdots(3)$$

さて、不変埋め込み法は、微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y,t)=y$$
$$\frac{dy}{dt}=g(x,y,t)\qquad\cdots(4)$$

を、境界条件

$x(t_0)=x(0)$:known　，　$x(t_f)=x(1)$:unknown
$y(t_0)=y(0)$:unknown　，　$y(t_f)=y(1)$:known
〔$t_f-t_0=m\lambda=1$とする〕

のもとに解くために、式(4)を特性曲線とする次の

$$\frac{\partial y}{\partial t}+f(x,y,t)\frac{\partial y}{\partial x}=g(x,y,t)\qquad\cdots(5)$$

なる一階偏微分方程式(5)を、条件$y(x,t_f)=y(1)$のもとに解くことと等価であることが示されている。［2］

式(4)、(5)は、Random Walk の式(3)、(2)と同形である。また、式(3)の二番目の式は、次の如く表される。

$$\frac{dQ}{dt}\fallingdotseq\frac{Q(X-h,t-\lambda)-Q(X,t)}{-\lambda}=g(X,Q(X,t),t)$$
$$\therefore\ Q(X-h,t-\lambda)=-\lambda g(X,Q(X,t),t)+Q(X,t)\qquad\cdots(6)$$

式(6)の $g(X,Q(X,t),t)$には、与えられた元の微分方程式の関数形を用いることにより、$Q(X-h,t-\lambda)$ を一様乱数を用いて求め、固定点x－h点に対して、乱数値個々による$Q(X-h,t-\lambda)$ の値が、h/λ $(=y(1)/m\lambda,$ $m\lambda=1)$より小となる条件を満たす個数を計量し、これと発生させた乱数総数との比を求める。

具体的には、$x=0, x=y(1)$の二点につき、それぞれに対するhだけ左の$0-h, y(1)-h$の点での各乱数値によるQ値を計算し、上記の比の値を求める操作を行う。

この場合、$x=y(1)$に関しては、上記操作をDirectに行うが、$x=0$ 点に関しては、〔$x(0)-y(1)$〕で表される$y(1)$から見た新しい座標上での$x(0)$ （$(x(0)-y(1))$値が所与境界条件の値により、正または負の値を

A Method for Approximate Boundary Value Solution of Ordinary Differential Equations
Hideaki Masuda , Toyosaku Isobe
Shibaura Institute of Technology

とる為に行う。）に対して、各乱数値により求めるQ値には、$(x(0)-y(1))<0$, $(y(1)-x(0))>0$ の場合に対し、それぞれ、$h^*/\lambda^*(=h/\lambda)$ より大、$-h^*/\lambda^*(=-h/\lambda)$ より大となる条件を満たす個数と乱数総数との比を求める操作を行う。但し、

$$h^*=\frac{|x(0)-y(1)|}{m}\ ,\ \lambda^*=\frac{|x(0)-y(1)|}{|y(1)|}$$

を、$(x(0)-y(1))<0$ の場合には、式(6)の h 及び λ の代わりに用い、$(y(1)-x(0))>0$ の場合には、式(6)に $h\to -h^*$, $\lambda\to -\lambda^*$ の入れ換えを行う。（Xの新座標値への変換も行う。）

これより、x 座標軸上の $x=0$, $x=y(1)$ 点において、縦軸にそれぞれ上記の比の値をとり、これを結ぶ直線がx軸を切る値を $x(1)$ として求める。

次に、元の微分方程式を $x(t_f)=x(1)$, $y(t_f)=y(1)$ なる初期値問題として、逆時間積分を行い、欠落初期値 $y(0)$ を求める手続きをとる。

3．計算例および結果の考察

方程式

$$\ddot{x}=x-(\dot{x})^2$$

これを分解した

$$\dot{x}=y \qquad x(0):\mathrm{known}\ ,x(1):\mathrm{unknown}$$
$$\dot{y}=x-y^2 \qquad y(0):\mathrm{unknown},y(1):\mathrm{known}$$

表１．$\ddot{x}=x-(\dot{x})^2$ の計算結果

初期値問題として求めた値		本アルゴリズムで求めた値
x(0) y(0)	x(1) y(1)	x(1) y(0) *
1.0 1.0	2.109837 1.290023	2.2114668 0.9933268
1.0 2.0	2.513168 1.477462	2.3767834 1.8965994
2.0 1.0	3.381513 1.688183	2.9791431 1.0134836
2.0 2.0	3.746717 1.822823	3.0700274 1.7686577
3.0 1.0	4.623507 2.016227	5.2925940 0.8574513
3.0 5.0	5.601718 2.285916	5.2576046 4.7454637
5.0 1.0	7.045661 2.546988	7.2771044 1.2804116
5.0 4.0	7.764450 2.703721	7.7249088 3.9756070
5.0 5.0	7.927823 2.736152	7.8175716 5.8184536
5.0 6.0	8.070148 2.763694	7.8962641 5.4556945

y(0) *は、逆時間積分がx(1)の微小誤差に対して敏感の為の処理を行ったデータである。

につき、まず $x(0)$:known, $y(0)$:known とした初期値問題を解き、$x(1)$, $y(1)$ を求める次に、これを $x(0)$:known, $y(1)$:known にしたTPBVPを本方法で $x(1)$, $y(0)$ の近似解を求めた結果を表１に示す。尚、この計算に使用した乱数（10個）を大小順に並べ、隣接し２個の差を離散分布にしたものを図１に示す。図２は、求解値の近似度がかなり低く出る乱数特性である。

これより、使用乱数には、離散分布の階段値の不規則度の高いものを選ぶことが望まれる。

4．おわりに

酔歩の不変埋め込み問題への応用を試みた。本求解の近似の精度を上げるためには乱数の大小順に配列した隣接乱数の階段値の不規則度の高い乱数を効率的に求めるアルゴリズムの作成と、更に高階常微分方程式のTPBVPへの応用を検討したい。

【参考文献】
［１］関根、高橋、若山：シミュレーション，日科技連，1988，pp.45-46.
［２］Meyer,G.H.:SIAM J. Appl. Math., Vol.16.,pp.448-509.,1986.

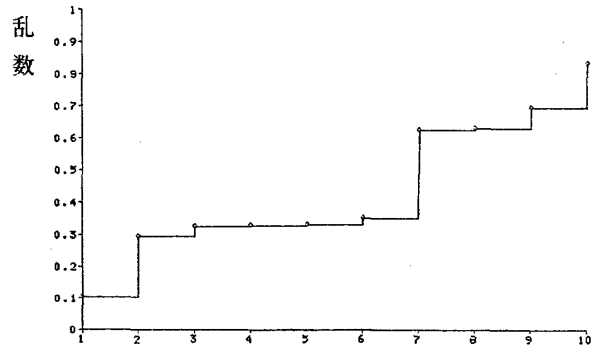

図１．乱数特性図

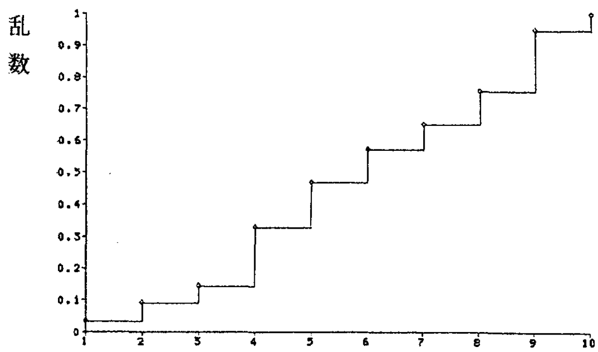

図２．乱数特性図