5B-5

凸関数により重みを変換した際の最短路問題に関する一考察

加藤　常員
岡山理科大学

1.はじめに

最短路問題は、始点と終点の選び方によって3種類[1]ほどに分類されるが、いずれも始点から終点への方向性を持って接続関係を求める辺重視の問題である。一方、最小木問題は、与えられたすべての頂点に対して接続関係のみを求める、方向性を考慮する必要がない頂点重視の問題である。両者の問題は、採択された辺(路あるいは枝)に関して、それらの重みの総和を最小とすることを共に目的としている。さらに、ある頂点を始点、他のすべての頂点を終点とする最短路問題では、いずれかの終点の最短路の部分路になる辺の総数は、最小木の枝の総数に等しく、特別な場合には、それらの辺と枝が完全に一致する。本稿では、各辺に付加された重みが非負なネットワークに関して、特定の頂点を始点、他の頂点を終点とする最短路問題と最小木問題との積極的な関連づけを試みる。

2.最短路木と最小木

本稿では、各辺 $e \in E$ に非負な実数値の重み $w_{(e)}$ が付与された無向グラフ $G=(V、E)$ のネットワークに規定して論じる。

2点 s、$t \in E$ の間の初等的な道の中で重みの和が最小なものを最短路と呼ぶ。ある頂点 s と他の頂点 t_i の間の最短路に採択されたの辺の集合を Pst_i するとき、

$$Ps = Pst_1 \cup Pst_2 \cup \cdots \cup Pst_i \cup \cdots \quad (t_i \in V \text{ and } t_i \neq s) \tag{1}$$

とする。ここで $\cup$ は集合の和を表す。グラフ $Ts=(V、Ps)$ は、木をなす。この木 Ts を最短路木と名づける。また、ネットワークの木の中で、木の重みの最小なものを最小木と呼ぶ。最短路木と最小木の枝(辺)の濃度は、明らかに等しい。最短路木の重みは最小木の重みに等しいか、またはより大きい。

最短路木を求めるDijkstraの算法および最小木を求めるPrim算法[1,2]は、本質的には共に一種の貪欲算法である。その差異は、判定部分で着目される辺の数と具体的に判定に用いられる不等式(関係)である。Dijkstraの算法では、図1(a)にような辺eに着目した3項関係を判定し、Primの算法では図1(b)にような、頂点v'に着目した2項関係の判定となっていると言える。

上述の事柄と最短路に関しての最適性の原理から、Dijkstraの算法になんらかの処理を付け加えることにより最小木が求まり、さらに最短路木と最小木の中間的な木(半最小木)を定めることができると考察される。付加する処理は、Dijkstraの算法の判定部分が重み関する判定であることから、各辺に与えられた重みに係わる処理であると示唆できる。次章において、この考察を実現させる。付加する処理は、Dijkstraの算法の前処理として導入する。

3.中継効果と半最小木

Dijkstraの算法により最小木および半最小木を求めるための重みに係わる前処理を提案する。前章の考察より、提案する前処理に要求される振舞は、次のように示せる。

3頂点a、b、cが与えられ、辺(a、b)、(a、c)、(b、c)が存在し、各辺に付加された重み w_{ab}、w_{ac}、w_{bc} が

$$w_{ac} < w_{ab} + w_{bc} \tag{2}$$

を満たすとき、適当な変換(関数) f を用いると

$$f_{(w_{ac})} > f_{(w_{ab})} + f_{(w_{bc})} \tag{3}$$

となることがある。例えば、この振舞は、「重みが2頂点間の距離、距離の関数が距離(移動)についての(移動による)負担量を与えるとき、aからcへの移動を負担の観点から考える際、bの位置によっ

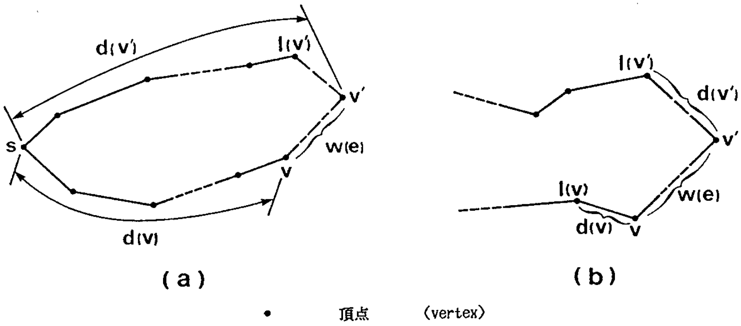

図1　辺の採択決定

(a) 最短路の判定:Dijkstraの算法: $d_{(v')} > d_{(v)} + w_{(e)}$
(b) 最小木の判定:Primの算法　: $d_{(v')} > w_{(e)}$

A Study of the Shortest Path Problem for a Transformation Weight by a Convex Function
Tunekazu KATO
Okayama University of Science

てはbを中継点として、a→b→cの迂回する経路を選択した方が負担が少なくて済む場合がある。」[3] などが想定できる。このような意味から、この振舞を“中継効果”と名づけた。

定義域、値域が共に非負の実数とする単調増加な狭義の凸関数 $f_{(w)}$ が中継効果を生じることがあることを次に示す（図２参照）。式(2)の条件に加えて w_{ab}、w_{bc}、w_{ac} が、

$$\left.\begin{aligned} w_{bc} &= k\,w_{ab} \\ w_{ac} &= l\,w_{ab} \end{aligned}\right\} \quad (0 < k < l) \tag{4}$$

を満たすものとすると、、$f_{(w_{bc})}$、$f_{(w_{ac})}$ は、

$$\left.\begin{aligned} f_{(w_{bc})} &= \Delta(k-1)w_{ab} + f_{(w_{ab})} \\ f_{(w_{ac})} &= \Delta'(l-1)w_{ab} + f_{(w_{ab})} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

となる。ここで Δ および Δ' は、

$$\Delta = \frac{f_{(w_{bc})} - f_{(w_{ab})}}{w_{bc} - w_{ab}} \tag{6}$$

および

$$\Delta' = \frac{f_{(w_{ac})} - f_{(w_{ab})}}{w_{ac} - w_{ab}} \tag{7}$$

とする。式(5)より $f_{(w_{ac})} - \{f_{(w_{ab})} + f_{(w_{bc})}\}$ の値が正であるためには、

$$\{\Delta'(l-1) - \Delta(k-1)\} > \frac{f_{(w_{ab})}}{w_{ab}} \tag{8}$$

を満たす必要がある。$f_{(w)}$ は単調増加な狭義の凸関数である（$\Delta' > \Delta$）ことと式(4)から式(8)の左辺は、常に正であると判定できる。しかしながら、不等式(8)全体の真偽判定は、単純に見極めることは出来ない。少なくとも関数の増加率(平均変化率の比)が辺の比に比べ十分に大きければ、式(8)は真となる。すなわち、

$$\frac{\Delta'}{\Delta} \gg \frac{k-1}{l-1}$$
$$\Rightarrow \quad f_{(w_{ac})} > f_{(w_{ab})} + f_{(w_{bc})}. \tag{9}$$

以上、述べた事柄は、与えられたネットワークのすべての辺の重みに対して、適当な単調増加な狭義の凸関数を用いた重み変換処理をDijkstraの算法の前処理として付加したとき、式(9)の前提の関係を満たすの３辺の重み間において中継効果が、起こることを示している。さらに、すべての３辺の重み間において中継効果が、起こるような増加性を持った凸関数を用いて前処理を付加されたDijkstraの算法より求められた木は、最小木に一致する。また、凸関数の条件を弛め $f_{(w)} = w$ としたとき中継効果は、すべての３辺の重み間において起こらず、最短路木が求まる。式(9)の前提部が一部の３辺の重み間についてのみ満たされるとき結果として求まる木は、最短路木と最小木の中間的なものとなる。この中間的な木を半最小木と名づける。

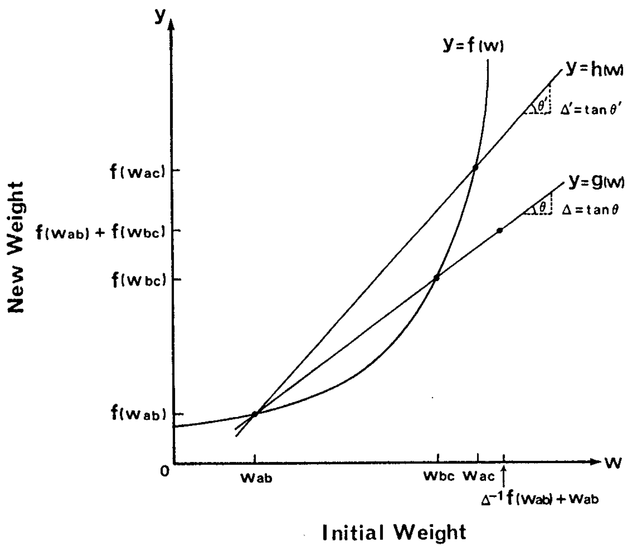

図２ 凸関数による中継効果

$g_{(w)} = \Delta(w - w_{ab}) + f_{(w_{ab})}$
$h_{(w)} = \Delta'(w - w_{ab}) + f_{(w_{ab})}$

４．まとめ

本稿では、各辺の重みが非負な無向のネットワークにおける、ある頂点を始点、他のすべての頂点を終点とする最短路問題と最小木問題の新たな関連づけを試みた。単調増加な凸関数で重みを変換すると“中継効果”が起こることを示した。最短路木を求めるDijkstraの算法に十分な増加性を示す凸関数で重みを変換する前処理を加えると最小木が求まり、適当な増加性の凸関数を用いると、最短路木と最小木の中間的な“半最小木”が求まることを示した。

本稿で与えた証明は、かなり直感的なものである。また、その成立条件は現在まだ、十分に吟味・検討していない。今後、これら点を押え、具体的な凸関数で、中継効果がどの程度に生じるのかを分析し諸性質を明らかにし、効果がどのように働くかを理論的に把握することが重要であり、より広い応用的研究につながるものと思われる。また、最小木が局所的な判定で求まることに着目したものであり、逐次的な結果が影響をおよぼす、半最小木について、その形態を把握するには、より多くの複雑な要素を検討する必要がある。また、式(9)の前提部は、かなり大雑把な条件であり、現実的な応用には、さらに進んだ検討が必要になると思われる。

なお、本研究の一部は、文部省科学研究費補助金(奨励研究(A)No.63790435)によった。

参考文献

(1) M.L.Fredman,R.E.Tarjan:Fibonacci Heaps and Their Uses in Improved Network Optimization Algorithms, Proc. 25th Ann. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci. pp338-346(1984).

(2) 伊理(監)、腰塚(編):計算機科学と地理情報処理、ｂｉｔ別冊、p247、共立出版、東京(1985).

(3) 加藤、小林、小沢、今枝:伝播負担関数による文化の伝播路の抽出、情処論、Vol.29、No.4、pp418-428(1988).