拡張HOUGH変換法

4V-5

沼田宗敏* 輿水大和**
*(株)ロゼフテクノロジー **中京大学教養部

1．まえがき

直線検出可能な変換関数群の中で$\rho=x.f_1(\theta)+y.f_2(\theta)$の形式を持つ変換関数Fによる拡張Hough 変換について述べる。

2．新しい変換関数

Hough 変換式(1) によるHough曲線

$$\rho=x\cdot\cos\theta+y\cdot\sin\theta \quad (1)$$

に代わる新しい変換関数Fによる曲線Cを考える。

$$F(\theta,\rho,x,y)=0 \quad (2)$$

関数Fは、以下の条件を満たすものとする。

条件1：$f_1(\theta)$,$f_2(\theta)$を θ のみによる連続１価関数として、関数Fは、$\rho=x\cdot f_1(\theta)+y\cdot f_2(\theta)$で記述される。 (3)

条件2：曲線CとHough曲線は、端点を共有する。$0\leqq\theta<\pi$

条件3：$f_1'(\theta)$,$f_2'(\theta)$ が定義される区間で、

$f_1(\theta)f_2'(\theta)-f_2(\theta)f_1'(\theta)>0$が成立する。

条件4： $\phi(\theta)=\tan^{-1}(f_2(\theta)/f_1(\theta))$は定義される区間で連続である。

3．性質

(2)式で定義される変換関数Fは、直線検出に必要な次の３つの性質を満たす。

3-1.性質１

「ﾊﾟﾗﾒｰﾀ平面上の１点（θ, ρ）は、X-Y平面上の直線１本に対 応する」

(3)式は(4)式のように変形できる。

$$R(\theta,\rho)=x\cdot\cos\phi(\theta)+y\cdot\sin\phi(\theta) \quad (4)$$

ﾊﾟﾗﾒｰﾀ対(ϕ,R)を固定した場合、上式はX-Y平面上で原点からの距離がRで垂角がϕの直線を表す。ここに、

$$\begin{cases}\phi(\theta)=\tan^{-1}(f_2(\theta)/f_1(\theta)) \\ R(\theta,\rho)=\sqrt{f_1(\theta)^2+f_2(\theta)^2}\cdot\rho\end{cases} \quad (5)$$

ここで、ﾊﾟﾗﾒｰﾀ対(θ,ρ)と(ϕ,R)が１対１の対応関係にあることは以下のように証明される。

① (θ,ρ)が決定されると、(5)式によって(ϕ ,R)はただ一義的に決まる。

② 条件１により$f_1(\theta)$と$f_2(\theta)$はθの連続１価関数であるので、$\phi(\theta)$は条件４によってθの連続１価関数である。逆にθが $\phi(\theta)$の連続１価関数であるには、$\phi(\theta)$が区間[0,π] で極値点を持たなければよい。これより、$\phi'(\theta)\neq0$が成立すればよい。ところで条件２と式(3)により、端点$\theta=0$と$\theta=\pi$で$f_1(\theta)=\cos\theta$,$f_2(\theta)=\sin\theta$となり端点では(5)式によって$\phi(\theta)=\theta$ となる。すなわち、 $\phi(0)<\phi(\pi)$であるから、$\phi'(\theta)>0$が成立しなければならない（図１）。

$$\phi'(\theta)=\frac{d}{d\theta}\tan^{-1}(f_2(\theta)/f_1(\theta))$$
$$=(f_1(\theta)f_2'(\theta)-f_2(\theta)f_1'(\theta))/(f_1(\theta)^2\cdot(1+(f_2(\theta)/f_1(\theta))^2))>0$$

条件３により、$\phi'(\theta)>0$が満足されるので、θは $\phi(\theta)$の連続１価関数である（図１）。さらに、θとR(θ, ρ)が決まれば(5)式によってρもただ一義的に決まる。それ故、(ϕ ,R)が決定されると、(θ,ρ)はただ一義的に決まる。ところで、(4)式から、ﾊﾟﾗﾒｰﾀ対(ϕ ,R)とX-Y平面上の直線１本とは１対１の対応関係にある事がわかっており、又、前述の命題により、(θ,ρ)と(ϕ,R)も１対１対応の関係にある。故に、ﾊﾟﾗﾒｰﾀ平面上の１点(θ,ρ)は、X-Y平面上の直線１本 $R=x\cdot\cos\phi+y\cdot\sin\phi$に対応することがわかる。

3-2.性質２

「X-Y平面上の１点(x,y)を通る全ての直線群は、関数Fによる１本の曲線Cで表す事ができる。」

曲線C上の１点(θ,ρ)はX-Y平面上の直線１本に対応する（性質１)。そして(4)式によって曲線C上の 全(θ,ρ)対に対応するX-Y平面上の直線群は、必ず１点(x,y)を通る。曲線C上のθを0からπまで連続的に変化させると、垂角である$\phi(\theta)$も 0からπまで連続的に変化する(図１)。故に曲線Cは１点(x,y)を通る全ての直線群を表す事ができる（図２）。

3-3.性質３

「共線上の２点に対応する２本の曲線C_1,C_2は、ﾊﾟﾗﾒｰﾀ平面

内でただ1回だけ交わる。」

直線ℓ上の1点(x_1,y_1)と(x_2,y_2)は$\theta-\rho$パラメータ平面ではそれぞれ曲線C_1と曲線C_2に対応する（図3）。曲線C_1と曲線C_2の交点(θ^*,ρ^*)は、X-Y平面では、　点(x_1,y_1)と(x_2,y_2)を同時に通る直線に対応し、

$$R^*=X\cdot\cos\phi^*+Y\cdot\sin\phi^* \qquad (7)$$

のように記述することが出来る。ここにR^*は原点からの距離、ϕ^*は垂角である。　(7)式の 直線は当然、1本しかないので(ϕ^*, R^*)の組も1つしかない。　ところで3-1で述べたように(ϕ^*, R^*)に対応するような(θ^*, ρ^*)の組もただ1つしかないことがわかっているので、交点(θ^*,ρ^*)は1つだけである事がわかる。

4．拡張Ｈｏｕｇｈ変換

(2)式によるHough変換を拡張Hough変換と呼ぶ。

4.1　Hough放物線

一例として、(8)式のHough放物線を考える。

$$\rho=x(1-2/\pi\cdot\theta)+4y\theta(1/\pi-\theta/\pi^2) \qquad (8)$$

ここで、$f_1(\theta)=1-2/\pi\cdot\theta$, $f_2(\theta)=4\theta(1/\pi-\theta/\pi^2)$とする。(8)式が拡張Hough変換する為の4条件を満足する事は容易に証明できる。図4に直線上の点群に対応する拡張Hough曲線群を示す。曲線群は1点(θ^*, ρ^*)で交わり、直線ℓは(8)′式で求める事ができる。

$$\rho^*=x(1-2/\pi\cdot\theta^*)+4y\theta^*(1/\pi-\theta^*/\pi^2) \qquad (8)'$$

4.2　高速Hough変換FIHT2

$$\rho=\begin{cases}(x\cos(\theta-\varepsilon/2)+y\sin\theta)/\cos(\varepsilon/2) & (0\le\theta<\pi/2)\\ (y\sin(\theta-\varepsilon/2)+x\cos\theta)/\cos(\varepsilon/2) & (\pi/2\le\theta<\pi)\end{cases} \qquad (9)$$

(9)式は、$\varepsilon \ll 1$ の時、拡張Hough変換の4条件を満足する。ここで式(9)の発生は、階差式(10)でインクリメンタルに発生できる事がわかっている。[1]

$$\begin{cases}\rho_0=x, \quad \rho'_0=y\\ \rho_{n+1}=\rho_n+\varepsilon\cdot\rho'_n\\ \rho'_{n+1}=\rho'_n-\varepsilon\cdot\rho_{n+1}\end{cases} \qquad (10)$$

ここに Kはθ軸方向の分割数, $\varepsilon=\pi/K$　, $n=0,1,2,\cdots,K/2-2$である。直線ℓ上の点群に対応する拡張Hough曲線群は、パラメータ平面上の1点(θ^*,ρ^*)で交わる。

求める直線ℓは、$\cos\varepsilon/2\fallingdotseq1$として (9)′式で計算出来る。

$$\rho^*=\begin{cases}x\cdot\cos(\theta^*-\pi/2K)+y\cdot\sin\theta^* & (0\le\theta^*<\pi/2)\\ y\cdot\sin(\theta^*-\pi/2K)+x\cdot\cos\theta^* & (\pi/2\le\theta^*<\pi)\end{cases} \qquad (9)'$$

5．結び

従来の$\rho=x\cdot\cos\theta+y\cdot\sin\theta$で表現されるHough変換に代わる新しい拡張Hough変換法を紹介した。高速Hough変換の1つPLHT[2]も拡張Hough変換であり、直線検出の高速化や精度向上等、拡張Hough変換の適用範囲は広い。

参考文献

(1)沼田,輿水:"インクリメンタルな高速Hough変換FIHT",信学技報,PRU87-93(1988)

(2)輿水,沼田:"区分的Hough直線を用いた高速Hough変換法",信学技報,PRU88-1(1988)

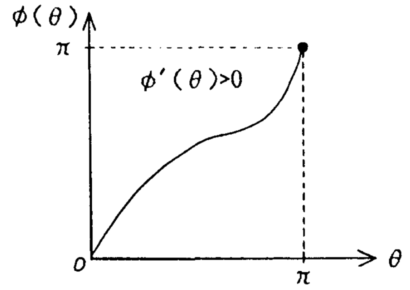

図1．連続1価関数φ(θ)

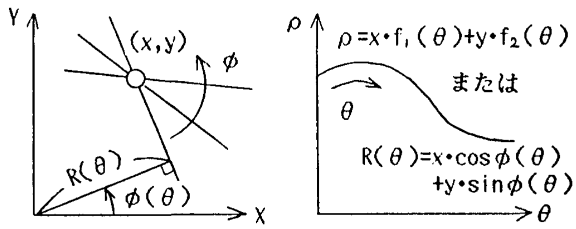

図2．曲線cに対応する直線群

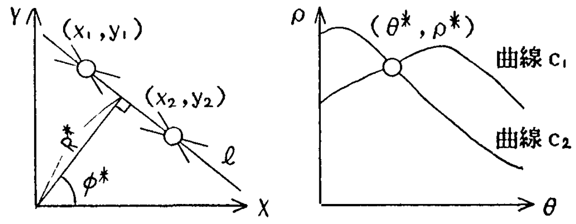

図3．共線上の2点曲線c

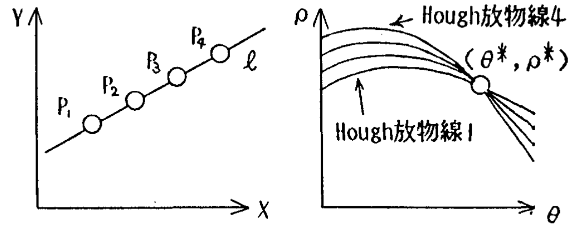

図4．Hough放物線による拡張 Hough変換