

Trefftz 法による非線形ポアソン方程式の解法

北 英 輔[†] 池 田 洋 一^{††} 神 谷 紀 生^{†††}

Trefftz 法は、支配方程式を満足する非特異な T-complete 関数を用いた数値解析法である。これまで、2 次元や 3 次元のラプラス方程式、2 次元弾性問題などの数値解析に適用され、その数学的特性が研究されている。これに対して、本論文では Trefftz 法を用いた 2 次元ポアソン方程式の解法について述べる。ポアソン方程式は非同次項を有するので、支配方程式を満足する T-complete 関数を決定することは一般的には困難である。そこで、本論文では、未知関数を含む非同次項をデカルト座標系の多項式で近似し、ラプラス方程式の T-complete 関数と近似多項式に対応する特解でポアソン方程式の解を近似する。そして、近似解が境界条件値を満足するようにして、未知パラメータを決定する。いくつかの解析例について提案する方法を適用し、その数学的特性を検討する。

Solution of Non-linear Poisson Equation by Trefftz Method

EISUKE KITA,[†] YOUICHI IKEDA^{††} and NORIO KAMIYA^{†††}

Trefftz method is the boundary-type solution procedure using the non-singular T-complete functions satisfying the governing equation. Until now, it is applied to numerical analyses of the two- and three-dimensional Laplace equations and the 2-dimensional elastic problem and the mathematical characteristic is studied. On the other hand, this paper describes the application of the Trefftz method to solve the boundary value problem of two-dimensional Poisson equation. Since the Poisson equation has non-homogeneous term, it is generally difficult to determine the function satisfying the governing equation. In this paper, non-homogeneous term containing an unknown function is approximated by the polynomial in the Cartesian coordinates and then, the solution for the Poisson equation is approximated with the superposition of the T-complete function of the Laplace equation and the particular solutions related to the approximate polynomial. Unknown parameters included in the approximate solution are determined so that the solution satisfies the boundary conditions. The present scheme is applied to some examples in order to study the numerical properties.

1. はじめに

Trefftz 法は、支配方程式を満足する T-complete 関数 (T-complete function) を用いた境界型数値解析法であり、1926 年に Trefftz により初めて提案された¹⁾。その後、Cheung ら^{2),3)}、Herrera⁴⁾、Jirousek ら⁵⁾、Kamiya ら⁶⁾、Piltner⁷⁾、Zielinski ら⁸⁾ などによって研究が進められている。Trefftz 法の定式化は大きく間接法と直接法に分類できる。間接法では、支配方程式を満足する特異性のない T-complete 関数を用いて未知関数を近似し、この近似解が境界条件を満足する

ように未知係数を決定する。直接法では、T-complete 関数を重み関数として支配方程式から重み付き残差式を導き、これに Gauss-Green の定理を適用することで境界積分方程式を導出する。間接法が Trefftz によって提案されたオリジナルな方法であるのに対して、直接法は Cheung らによって比較的最近提案された方法である。これまで Trefftz 法の適用対象は、ポテンシャル問題^{2),8)} や 2 次元弾性問題³⁾ など、主として同次方程式に支配された問題に限られていた。そこで、本論文ではポアソン方程式の解析に Trefftz 法を適用する方法について述べる。

ポアソン方程式の境界値問題は、これまでにも有限要素法や境界要素法を用いて解析が行われている。しかし、これまでの定式化ではポアソン方程式の非同次項に由来する領域積分を評価するために領域要素分割を必要とする。自動的な領域要素分割についての研究は近年進歩しているが、これにかかる計算コストは比較的高いので、逆問題解析など数値シミュレーション

[†] 名古屋大学情報文化学部
School of Informatics & Sciences, Nagoya University

^{††} 大同工業大学機械工学科
Department of Mechanical Engineering, Daidoh Institute of Technology

^{†††} 名古屋大学人間情報学研究科
Graduate School of Human Informatics, Nagoya University

に適用する場合は問題がある．また，数値シミュレーションでは未知関数の導関数を必要とする場合が多いが，有限要素法では未知関数を比較的低次の多項式で近似して解析を行うために，未知関数の導関数を計算する場合に近似精度が低下する可能性がある．一方，境界要素法では未知関数を含む境界積分方程式が基本解に由来する特異性を有しているため，未知関数の導関数に関する積分方程式は高次の特異性を有することとなり，数学的な扱いが難しくなる．これに対して，Trefftz 法では特異性のない関数を定式化に用いるので関係性も非特異であり，これを微分するだけで未知関数の導関数を評価することができるうえ，有限要素法で見られるような精度低下の可能性も小さいと考えられる．このように Trefftz 法は数値シミュレーションなどへの応用を考えるといくつかの興味ある特徴を有している．そこで，本論文では非同次方程式に支配される現象の数値シミュレーションに Trefftz 法を適用することの基礎研究として，Trefftz 法において領域要素を用いないでポアソン方程式を解析する方法について述べる．

Trefftz 法をポアソン方程式など非同次方程式の解析に適用する場合，一般的な非同次項に対応して支配方程式を満足する T-complete 関数の導出が困難となる．この問題を解決するために，本論文では神谷ら⁹⁾が提案している計算点解析法を利用した次の方法を提案する．まず，非同次項を直交座標系について完全多項式で近似し，それに対応する特解を決定する．そして，境界値問題の解を同次方程式（ラプラス方程式）の T-complete 関数と近似非同次項に対する特解の重ね合わせで近似する．近似解に含まれる未知係数は解が境界条件を満足するように決定される．この定式化は，いわゆる間接法に基づいた定式化である．このとき，未知係数を決定するために選点法を用いると，未知数についての連立方程式を導出するために境界要素や要素積分などの操作をまったく必要としない，いわゆる element-free な数値解析法となり，アルゴリズムの単純さ，短い計算時間などの点からも非常に有利となる．

ポアソン方程式への Trefftz 法の適用としては，すでに真鍋ら¹⁰⁾が境界要素法の二重相反法（Dual Reciprocity Method, DRM）を適用した手法を提案している．これに対して，本研究では神谷らが提案している計算点解析法を適用する．二重相反法では Radial Bases Function を用いて特解を近似するのに対して，計算点法では領域全体についての完全多項式を用いる点が異なる．また，真鍋らは解析対象として非同次項

が座標のみの関数である場合を扱っているが，本論文では非同次項に未知関数を含む場合の定式化についても述べる．

最後に，提案する方法をいくつかの解析例に適用し，解析結果を厳密解と比較することで有効性を検討する．

2. 選点法による Trefftz 法の定式化

本論文で提案する方法では，2次元ポアソン方程式の境界値問題が2次元ラプラス方程式の境界値問題に帰着されて解析される．そこで，最初に，2次元ラプラス方程式の境界値問題に対する Trefftz 法の定式化について述べる．

2.1 2次元ラプラス方程式の境界値問題と T-complete 関数

2次元ラプラス方程式の境界値問題は次のようになる．

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 \quad (\text{in } \Omega) \\ u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q &\equiv \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで Ω , Γ_1 , Γ_2 は解析対象領域，ポテンシャル u とフラックス q の指定境界である． \bar{n} は境界単位法線ベクトル， (\cdot) は既定値を示す．

Trefftz 法では定式化に T-complete 関数と呼ばれる非特異な関数群を用いる．T-complete 関数は支配方程式を満足するように決定されており，2次元閉領域における2次元ラプラス方程式について次のように与えられる⁴⁾．

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{*T} &= \{u_1^*, \dots, u_{2\mu-1}^*, u_{2\mu}^*, \dots\} \\ &= \{1, \dots, \Re[r^\mu e^{j\mu\theta}], \Im[r^\mu e^{j\mu\theta}], \dots\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで r , θ は平面極座標であり，原点は任意にとられる．

2.2 選点法による定式化

ポテンシャル u を T-complete 関数 u_n^* の線形結合で次のように近似する．

$$\begin{aligned} u &\simeq \tilde{u} = a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \dots + a_N u_N^* \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* \end{aligned} \quad (4)$$

ここで N は T-complete 関数の総数を， $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_N\}^T$ は未知係数ベクトルを示す．この式を境界の法線方向に偏微分すれば境界でのフラックスの近似式を得る．

$$\begin{aligned} q &\simeq \tilde{q} \equiv \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{n}} = a_1 q_1^* + a_2 q_2^* + \dots + a_N q_N^* \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* \end{aligned} \quad (5)$$

これらを式 (2) に代入すると境界条件は完全には満足されないので残差が生じる．つまり，

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv \tilde{u} - \bar{u} = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* - \bar{u} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \\ R_2 &\equiv \tilde{q} - \bar{q} = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* - \bar{q} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \end{aligned}$$

Trefftz 法では境界条件を満足するように係数ベクトル \mathbf{a} を定める．選点法による定式化では境界選点 P_m で，上式の残差を 0 とおく．つまり，

$$\begin{aligned} R_1(P_m) &= \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P_m) - \bar{u}(P_m) = 0 \quad (P_m \in \Gamma_1) \\ R_2(P_m) &= \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(P_m) - \bar{q}(P_m) = 0 \quad (P_m \in \Gamma_2) \end{aligned}$$

上式を整理すると，

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (6)$$

ここで，

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} u_{11}^* & \cdots & u_{1N}^* \\ \vdots & & \vdots \\ u_{M_1 1}^* & \cdots & u_{M_1 N}^* \\ q_{11}^* & \cdots & q_{1N}^* \\ \vdots & & \vdots \\ q_{M_2 1}^* & \cdots & q_{M_2 N}^* \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{f} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{M_1}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{M_2}\}^T \quad (8)$$

ただし， $u_n^*(P_m) \equiv u_{mn}^*$ ， $q_n^*(P_m) \equiv q_{mn}^*$ ， $\bar{u}(P_m) \equiv \bar{u}_m$ ， $\bar{q}(P_m) \equiv \bar{q}_m$ である．また， M_1 ， M_2 はそれぞれ Γ_1 ， Γ_2 上にとられた選点の総数である．

係数マトリックス \mathbf{K} において，行数は選点総数に等しく，列数は T-complete 関数の総数に等しい．そこで，選点総数を T-complete 関数の総数以上にとって過剰定義の連立一次方程式とし，次式を解いて最小二乗解を求めることにする．

$$\min_{\mathbf{a}} \|\mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{a}\| \quad (9)$$

この方程式を解くために LAPACK ソフトウェアの特異値分解を適用する¹¹⁾．

2.3 2次元ポアソン方程式の境界値問題

支配方程式と境界条件が次式で与えられる 2次元ポアソン方程式の境界値問題を考える．

$$\nabla^2 u + b(x, y, u) = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで， $b(x, y, u)$ はポアソン方程式の非同次項であり，以下では非同次項が u を含む場合と含まない場合にわけて，提案する方法の定式化を説明する．

3. 非同次項が座標のみの関数である場合

3.1 境界値問題

ここでは，ポアソン方程式の非同次項が，座標のみ

の関数で与えられる場合を考える．このとき，境界値問題の支配方程式と境界条件は次式で与えられる．

$$\nabla^2 u + b(x, y) = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

3.2 支配方程式の変換

最初に，非同次項 $b(x, y)$ を直交座標系 x, y の 5次完全多項式を用いて近似する．つまり，

$$\begin{aligned} b(x, y, u) &= c_1 + c_2 x + c_3 y + \cdots + c_{20} x y^4 \\ &\quad + c_{21} y^5 \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{r} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで， \mathbf{c} と \mathbf{r} は未知パラメータベクトルと完全多項式の各項から成るベクトルであり，それぞれ次式で与えられる．

$$\mathbf{c}^T = \{c_1, c_2, \dots, c_{21}\} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T &= \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, \\ &\quad y^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, \\ &\quad x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5\} \end{aligned} \quad (16)$$

未知パラメータ \mathbf{c} を決定するために，境界上と領域内いくつかの評価点をとる．これらの評価点を，ここでは計算点と呼ぶ．すべての計算点 Q_m において，式 (14) を選点法的に満足させることを考えると次の連立方程式を得る．

$$\mathbf{c}^T \mathbf{r}(Q_1) - b(Q_1) = 0$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{r}(Q_2) - b(Q_2) = 0$$

⋮

$$\mathbf{c}^T \mathbf{r}(Q_M) - b(Q_M) = 0$$

ここで， M は計算点の総数である．上式を整理して次式を得る．

$$\mathbf{D} \mathbf{c} = \mathbf{g} \quad (17)$$

係数行列 \mathbf{D} では行数は計算点数 M に等しく，列数は係数の個数 21 に等しい．そこで， $M \geq 21$ となるように計算点を取り，次式の過剰定義の連立一次方程式を得る．

$$\min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{g} - \mathbf{D} \mathbf{c}\| \quad (18)$$

この方程式を解くために LAPACK ソフトウェアの特異値分解を適用する¹¹⁾．

ひとたび係数 \mathbf{c} が定まれば，解くべき支配微分方程式は次式で近似される．

$$\nabla^2 u + \mathbf{c}^T \mathbf{r} = 0 \quad (19)$$

式 (19) の同次解を u^h ， \mathbf{r} の各項に対応する特解を u_n^p とすれば，境界値問題の解 u は次式で近似される．

$$\begin{aligned}
 u &= u^h + c_1 u_1^p + c_2 u_2^p + \cdots + c_{21} u_{21}^p \\
 &= u^h + \mathbf{c}^T \mathbf{u}^p \tag{20}
 \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_{21}\}^T$ であり, u^h, u_n^p は次式を満足する.

$$\nabla^2 u^h = 0 \tag{21}$$

$$\nabla^2 u_n^p + r_n = 0 \tag{22}$$

r_n は多項式の項であるから, u_n^p を容易に求めることができる. なお, 特解 u_n^p の具体形を付録に示す.

式 (20) を支配方程式と境界条件に代入すると, 境界値問題は次式に変形できる.

$$\nabla^2 u^h = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{23}$$

$$\left. \begin{aligned}
 u^h &= \bar{u} - \mathbf{c}^T \mathbf{u}^p \quad (\text{on } \Gamma_1) \\
 q^h &= \bar{q} - \mathbf{c}^T \mathbf{q}^p \quad (\text{on } \Gamma_2)
 \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

ここで, $q^h \equiv \partial u^h / \partial \tilde{n}$, $q^p \equiv \partial u^p / \partial \tilde{n}$ である.

このように, 最初の問題は同次解 u^h についてのラプラス方程式の境界値問題に変形されたので, 先に述べた Treftz 法の定式化に従って 2 次元ラプラス方程式の境界値問題を解析すれば u^h を決定することができる. そして, ひとたび u^h が決定されれば, 解 u は式 (20) より決定される.

ところで, この章と次章で示す定式化では非同次項を近似するために 5 次の完全多項式を利用しているが, 完全多項式の次数の選択には注意が必要である. 一般的には, 完全多項式の次数は大きいほど高い近似精度を期待できると思われるが, c を求めるための連立方程式の係数行列の特異性は計算点の個数と配置, 近似多項式の次数などに依存する. そこで, ここでは連立方程式の特異性と連立方程式を解くために用いる特異値分解法の精度, 解析例の領域形状などを考慮して 5 次までの完全多項式で非同次項を近似している.

3.3 解析アルゴリズム

アルゴリズムを示すと以下ようになる.

- (1) 解析データとして, 境界選点の個数, 座標値と既定境界条件値, 内点の個数と座標値, 解析に用いる T-complete 関数の個数を与える.
- (2) 非同次項 $b(x, y)$ を 5 次の完全多項式で近似して, パラメータ c を決定する.
- (3) 式 (23) と式 (24) で与えられる境界値問題を解いて同次解 u^h を計算する.
- (4) 式 (20) より解 u を計算する.

4. 非同次項が u の関数である場合

4.1 境界値問題

この場合, 支配方程式と境界条件は次式で与えられる.

$$\nabla^2 u + b(x, y, u) = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{25}$$

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1) \\
 q &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2)
 \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

4.2 支配方程式の変換

先に述べた定式化に従えば, 問題は次の境界値問題に変換される.

$$\nabla^2 u^h = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{27}$$

$$\left. \begin{aligned}
 u^h &= \bar{u} - \mathbf{c}(u)^T \mathbf{u}^p \quad (\text{on } \Gamma_1) \\
 q^h &= \bar{q} - \mathbf{c}(u)^T \mathbf{q}^p \quad (\text{on } \Gamma_2)
 \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

さらに,

$$b(x, y, u) = \mathbf{c}(u)^T \mathbf{r} \tag{29}$$

$$u = u^h + \mathbf{c}(u)^T \mathbf{u}^p \tag{30}$$

この場合先の方法と異なり, 未知パラメータ c は未知関数であるポテンシャル u の関数となり, あらかじめ定めることができないので収束計算が必要である. つまり, 最初に c を仮定して解析を行い, 得られた u から非同次項を計算して, 式 (29) を満足するように未知パラメータを変更することになる. この方法について説明する.

4.3 未知パラメータの更新法

まず, 式 (29) を繰り返し計算 (k) と ($k+1$) 回目について考えると次式となる.

$$b(x, y, u^{(k+1)}) = \mathbf{r}^T \mathbf{c}^{(k+1)}$$

$$b(x, y, u^{(k)}) = \mathbf{r}^T \mathbf{c}^{(k)}$$

左辺と右辺をそれぞれ引き算すると次式となる.

$$\begin{aligned}
 b(u^{(k+1)}) - b(u^{(k)}) &= \mathbf{r}^T (\mathbf{c}^{(k+1)} - \mathbf{c}^{(k)}) \\
 &\equiv \mathbf{r}^T \Delta \mathbf{c} \tag{31}
 \end{aligned}$$

そして, 境界上と領域内にとられた計算点において式 (31) を選点法的に満足するように $\Delta \mathbf{c}$ を決定する. つまり, 計算点 Q_m について式 (31) を考えると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}^T(Q_m) \Delta \mathbf{c} &= b(u^{(k+1)}) - b(u^{(k)}) \\
 &= b(u^{(k+1)}) - \mathbf{r}^T \mathbf{c}^{(k)} \\
 &\equiv \Delta b(Q_m)
 \end{aligned}$$

すべての計算点 Q_m で上式を考慮して連立方程式とすると次式になる.

$$D \Delta \mathbf{c} = \mathbf{g} \tag{32}$$

ここで D と g は、それぞれ完全多項式の項から成る行列と非同次項に関する係数ベクトルである。係数行列 D の行数は計算点数 M に等しく、列数は係数の個数 21 に等しい。そこで、 $M \geq 21$ となるように計算点をとり、次式の過剰定義の連立一次方程式を得る。

$$\min_{\Delta c} \|g - D\Delta c\| \tag{33}$$

この連立方程式を解くために LAPACK ソフトウェアの特異値分解¹¹⁾ を適用する。こうして求めた Δc を用いて c を次式で更新する。

$$c^{(k+1)} = c^{(k)} + \Delta c \tag{34}$$

収束判定条件を次式のように定義する。

$$\eta \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |\Delta b(Q_m)| < \eta_c \tag{35}$$

ここで、 η_c はユーザによって定義された正の定数である。

4.4 解析アルゴリズム

アルゴリズムを示すと以下ようになる。

- (1) 解析データとして、境界選点の個数、座標値と既定境界条件値、内点の個数と座標値、解析に用いる T-complete 関数の個数を与える。
- (2) $k \leftarrow 0$ として、 c を仮定する。
- (3) 式 (27) と式 (28) より与えられる境界値問題を解き、 u^k を求める。
- (4) 式 (20) より $u^{(k+1)}$ を求め、続いて計算点での非同次項 $b(x, y, u^{(k+1)})$ を計算する。
- (5) 式 (35) より収束判定を行う。収束条件を満足すれば結果を出力し、満足しなければ次へ進む。
- (6) 連立方程式 (33) を解いて Δc を決定する。
- (7) 式 (34) によって c を更新して k をインクリメントし、(3) へ進む。

5. 解析例

5.1 例題 1

最初の例題として、支配方程式が次式で与えられる場合を考える。

$$\nabla^2 u + \frac{\pi^2}{2} u = 0$$

境界条件は図 1 に示されるように与える。この問題の解析解は次式で与えられる。

$$u^{ex} = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

解析のために、境界上に選点を 84 個等間隔に配置する。形状のかど部には、選点をいわゆる 2 重選点と

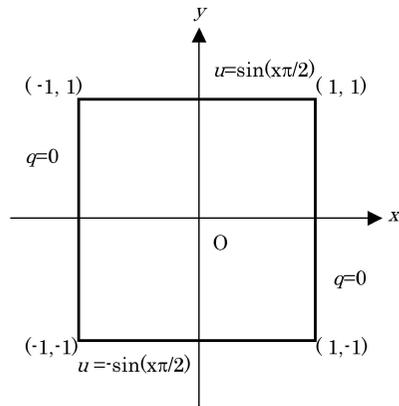


図 1 解析例 1
Fig. 1 Numerical example 1.

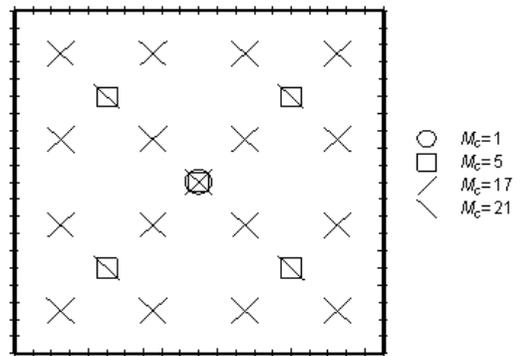


図 2 境界選点と計算点の配置
Fig. 2 Placement of collocation and computing points.

して配置する。この場合、かど上に 2 個の選点を配置し、これらの選点は同じ座標値を持つとともに、異なる法線ベクトルと境界条件値が与えられている。また、それ以外に内点をそれぞれ 0, 1, 5, 17, 21 個配置する場合を比較する。境界点と内点の配置を図 2 に示す。計算点としてはすべての境界点と内点をとって、最小二乗近似を行う。解析に用いる T-complete 関数の個数は 30 個である。また、パラメータ c_n の初期値はすべて 0 とする。

領域全体での計算精度を検討するために、25 個の精度評価点を境界と領域に均等に配置し、領域全体の計算精度を示す指標として次式を用いる。

$$E_u = \frac{1}{25} \sum |u - u^{ex}|$$

η の収束状況を図 3 に示す。横軸には繰返し計算の回数を、縦軸には η の値をとり、異なる内点数での収束特性の違いを比較する。これより、 η は内点数によらず 6 回程度の繰返し計算で、それぞれ収束している

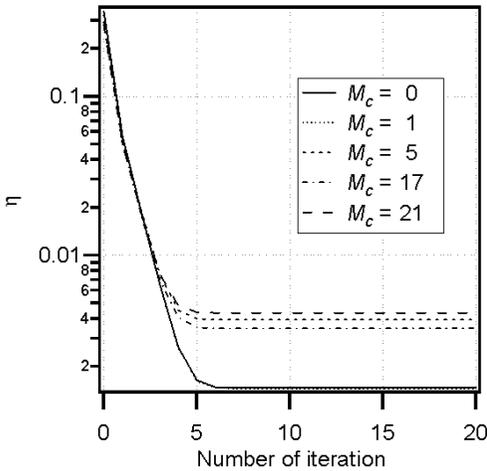


図 3 η の収束状況
Fig. 3 Convergence property of η.

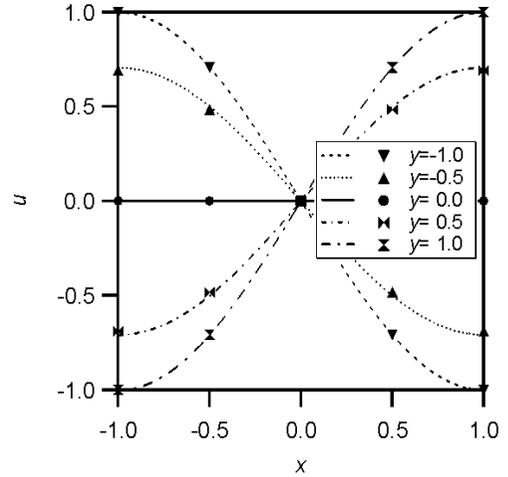


図 5 ポテンシャルの分布 ($M_c = 0$)
Fig. 5 Distribution of potential value ($M_c = 0$).

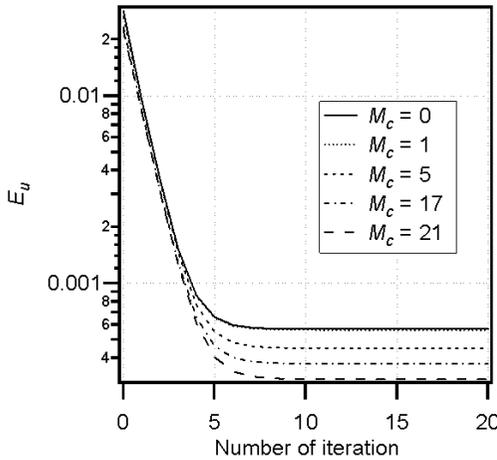


図 4 E_u の収束状況
Fig. 4 Convergence property of E_u .

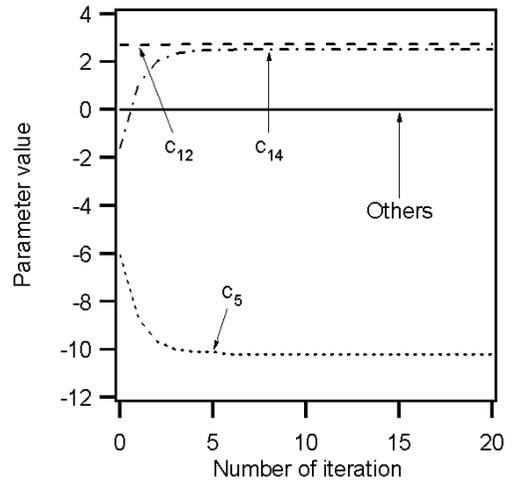


図 6 パラメータ c_n の収束状況
Fig. 6 Convergence property of c_n .

ことが分かる．また、内点数が少ないほど η の最終的な値は小さいことが分かる．次に、 E_u の収束状況を図 4 に示す．横軸には繰返し計算の回数を、縦軸には E_u の値をとり、異なる内点数での収束特性の違いを比較する．この場合も η と同じく、 E_u は 6 回程度の繰返し計算で収束しているが、この場合は内点数が多いほど最終的な精度が良いことが分かる．内点なしで解析を行い、十分収束したときの u の分布を図 5 に示す．横軸には、精度評価点の x 座標をとり、縦軸には u の値をとる．線は理論解を、記号は提案した方法で求めた数値解を示す．このグラフより、数値解が理論解とよく一致していることが分かる．最後に、パラメータ c_n の収束状況を図 6 に示す．グラフから分かるように、 c_5, c_{12}, c_{14} がそれぞれ $-10, 2.5, 2.5$ 付

近に収束しているのに対して、それら以外のパラメータはすべて 0 のままである．

5.2 例題 2

次の例題として、支配方程式が次式で与えられる場合を考える．

$$\nabla^2 u + u^2 = 0$$

境界条件は図 7 に示されるように与える．解析のために、境界上に選点を 84 個等間隔に配置する．形状のかど部には、選点をいわゆる 2 重選点として配置する．この場合、かど上に 2 個の選点を配置し、これらの選点は同じ座標値を持つとともに、異なる法線ベクトルと境界条件値が与えられている．また、それ以外に内点をそれぞれ 0, 1, 5, 17, 21 個配置する場合

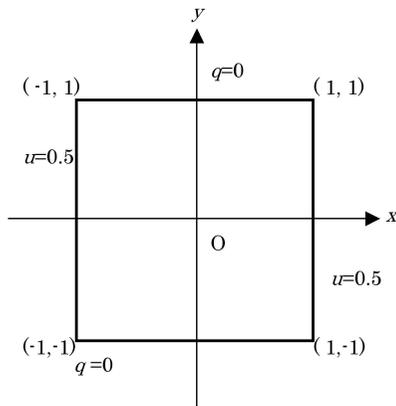


図 7 解析例 2
Fig. 7 Numerical example 2.

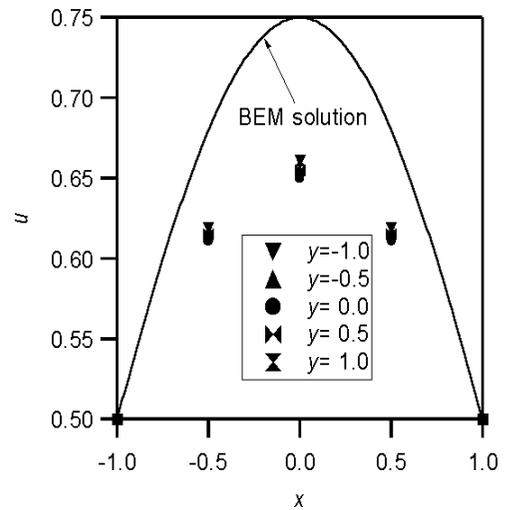


図 9 ポテンシャルの分布 ($M_c = 0$)
Fig. 9 Distribution of potential value ($M_c = 0$).

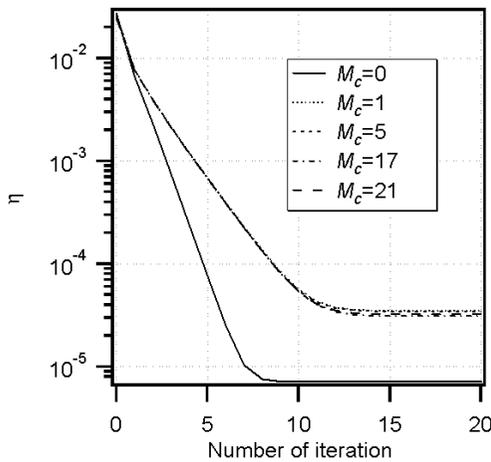


図 8 η の収束状況
Fig. 8 Convergence property of η .

を比較する．境界点と内点の配置を図 2 に示す．計算点としてはすべての境界点と内点をとって，最小二乗近似を行う．解析に用いる T-complete 関数の個数は 30 個である．また，パラメータ c_n の初期値はすべて 0 とする．

η の収束状況を図 8 に示す．横軸には繰返し計算の回数を，縦軸には η の値をとり，異なる内点数での収束特性の違いを比較する．これより， η は内点数によらず 10 回程度の繰返し計算で収束しており，内点数が少ないほど η の最終的な値は小さいことが分かる．そこで，内点数 0 個と 21 個で解析を行い，十分に収束した場合の関数値の分布を境界要素法による結果と比較する．比較した結果を，図 9 と図 10 に示す．これより，内点数が 0 の場合は境界から離れるに従って誤差が大きくなるのに対して，内点数が 21 の場合は全体に良い精度を得ていることが分かる．

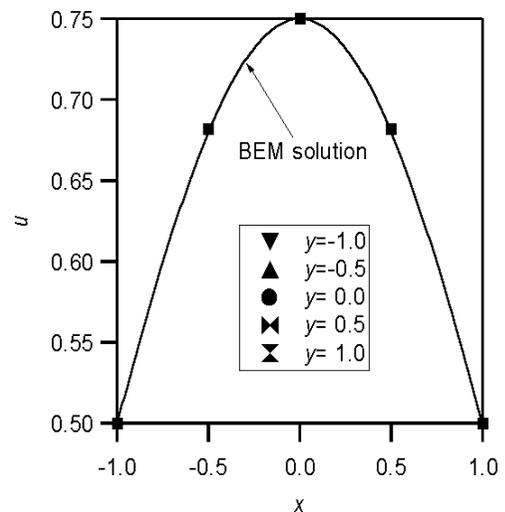


図 10 ポテンシャルの分布 ($M_c = 21$)
Fig. 10 Distribution of potential value ($M_c = 21$).

6. ま と め

本研究では，2 次元ポアソン方程式の境界値問題に対する Trefftz 法の定式化法について提案した．Trefftz 法は支配方程式を満足する非特異な T-complete 関数を用いる解析法である．Trefftz 法をポアソン方程式の境界値問題の解析に適用する場合，非同次項の存在により T-complete 関数を導出することが一般的に困難であるため，適用が容易ではなかった．この問題を解消するために，本研究では以下のような方法を提案した．まず，非同次項を 5 次までの完全多項式で近似

した．そして，完全多項式の各項を非同次項とするポアソン方程式を考え，そのポアソン方程式に対する特解を用いて，最初のポアソン方程式をラプラス方程式に変換して解析した．

解析対象として，非同次項が未知ポテンシャルを含む場合を考え，解法の特性について検討した．最初に，非同次項がポテンシャルの線形関数として与えられる場合について解析を行った結果，内点数によらず同様な収束特性を示し，良好な計算精度を得た．続いて，非同次項がポテンシャルの非線形関数として与えられる場合について解析を行い，内点を多くとる方が高い計算精度を得ることができた．

ところで，今回提案した方法では非同次項を 5 次までの完全多項式で近似したが，どのような近似関数を利用するべきかは解くべき問題に依存する．また，係数パラメータ c やその更新量 Δc を求めるために解かれる連立方程式の係数行列の特異性は，近似関数，計算点の個数と配置などに依存する．本論文で示した解析例では，係数行列の特異性と係数行列を解くために用いた特異値分解法の精度などを考慮して，これらを決定している．そこで，今後はこれらの点についての理論的考察を行うとともに，非同次項にポテンシャルの導関数を含むような問題への適用を通じて，提案する方法の特性をさらに検討していきたい．また，提案する手法のアルゴリズムの収束特性は解析領域の形状や選点のとり方に依存していると考えられるので，これらの点についても理論と数値実験の面から検討を進めたいと考えている．

参 考 文 献

- 1) Treffitz, E.: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren, *Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech.*, Zurich, pp.131–137 (1926).
- 2) Cheung, Y.K., Jin, W.G. and Zienkiewicz, O.C.: Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Treffitz functions. *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol.5, pp.159–169 (1989).
- 3) Jin, W.G., Cheung, Y.K. and Zienkiewicz, O.C.: Application of the Treffitz method in plane elasticity problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.30, pp.1147–1161 (1990).
- 4) Herrera, I.: Theory of connectivity: A systematic formulation of boundary element methods, *New Developments in Boundary Element Methods (Proc. 2nd Int. Seminar on Recent Advances in BEM, Southampton, England)*,

Brebbia, C.A. (Ed.), pp.45–58, Pentech Press (1980).

- 5) Jirousek, J. and Leon, N.: A powerful finite element for plate bending, *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, Vol.12, pp.77–96 (1977).
- 6) Kamiya, N. and Wu, S.T.: Generalized eigenvalue formulation of the Helmholtz equation by the Treffitz method, *Engineering Computations*, Vol.11, pp.177–186 (1994).
- 7) Piltner, R.: A quadrilateral hybrid-Treffitz plate bending element for the inclusion of warping based on a three-dimensional plate formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.33, pp.387–408 (1992).
- 8) Zielinski, A.P. and Zienkiewicz, O.C.: Generalized finite element analysis with T-complete boundary number function, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.21, pp.509–528 (1985).
- 9) 神谷紀生, 許松青: 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法, *Trans. JSME*, Vol.A64, pp.147–154 (1998).
- 10) 真鍋 尚, 福本容子, 登坂宣好: Treffitz 法の 2 次元ポアソン方程式への適用, 計算工学会講演論文集, Vol.5, pp.289–292 (2000).
- 11) Anderson, E., Bai, Z., Bischof, C., Demmel, J., Dongarra, J., Du Croz, J., Greenbaum, A., Hammarling, S., McKenney, A., Ostrouchov, S. and Sorensen, D.: *LAPACK User's Manual*.SIAM, 2nd edition (1995).

付 録

完全多項式の各項を非同次項とするポアソン方程式に対応する特解 u_n^p

$$u_1^p = -\frac{x^2 + y^2}{4}$$

$$u_2^p = -\frac{x^3 + xy^2}{8}$$

$$u_3^p = -\frac{x^2y + y^3}{8}$$

$$u_4^p = -\frac{x^4 + x^2y^2 - y^4/6}{14}$$

$$u_5^p = -\frac{x^3y + xy^3}{12}$$

$$u_6^p = -\frac{-x^4/6 + x^2y^2 + y^4}{14}$$

$$u_7^p = -\frac{x^5 + x^3y^2 - xy^4/2}{22}$$

$$u_8^p = -\frac{x^4y + x^2y^3 - y^5/10}{18}$$

$$\begin{aligned}
 u_9^p &= -\frac{-x^5/10 + x^3y^2 + xy^4}{18} \\
 u_{10}^p &= -\frac{-x^4y/2 + x^2y^3 + y^5}{22} \\
 u_{11}^p &= -\frac{x^6 + x^4y^2 - x^2y^4 + y^6/15}{32} \\
 u_{12}^p &= -\frac{x^5y + x^3y^3 - 3xy^5/10}{26} \\
 u_{13}^p &= -\frac{-x^6/15 + x^4y^2 + x^2y^4 - y^6/15}{24} \\
 u_{14}^p &= -\frac{-3x^5y/10 + x^3y^3 + xy^5}{26} \\
 u_{15}^p &= -\frac{x^6/15 - x^4y^2 + x^2y^4 + y^6}{32} \\
 u_{16}^p &= -\frac{x(3x^6 + 3x^4y^2 - 5x^2y^4 + y^6)}{132} \\
 u_{17}^p &= -\frac{35x^6y + 35x^4y^3 - 21x^2y^5 + y^7}{1260} \\
 u_{18}^p &= -\frac{-x^7/21 + x^5y^2 + x^3y^4 - xy^6/5}{32} \\
 u_{19}^p &= -\frac{-x^6y/5 + x^4y^3 + x^2y^5 - y^7/21}{32} \\
 u_{20}^p &= -\frac{x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 + 35xy^6}{1260} \\
 u_{21}^p &= -\frac{y(x^6 - 5x^4y^2 + 3x^2y^4 + 3y^6)}{132}
 \end{aligned}$$

(平成 13 年 8 月 27 日受付)

(平成 14 年 4 月 16 日採録)



北 英輔(正会員)

1964 年生。1991 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了。1999 年より名古屋大学助教授。工学博士。日本機械学会, 応用数学会, シミュレーション学会, IEEE 各会員。



池田 洋一

1953 年生。1997 年より大同工業大学講師。日本機械学会, 日本設計工学会, 化学工学会, 日本伝熱学会各会員。



神谷 紀生

1941 年生。1968 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了。1987 年より名古屋大学教授。工学博士。日本機械学会, 応用数学会, シミュレーション学会, IEEE, ISBE

各会員。