最小二乗法における重みの影響

5D-5

石川　甲子男
東京都立大学

1．まえがき

最小二乗法において，処理の対象となるデータが，すべて同一の精度で得られたものであれば問題はないが，通常は観測精度が異なっているため各データ毎に異なった重みを付ける必要がある．

この重みがしばしば問題となる．通常は観測精度の２乗に比例したもの，すなわち分散に反比例したものを重みとしている．

しかし，計算処理前にその値を推定するのは難しい．そこで重みの値の結果に及ぼす影響を予め調べておいて，重みの値の許容範囲を知ることが必要である．

本報告はこのような目的のため，最小二乗法において重みの変化に対する期待値の変化を調べた．

3．重みの変化による期待値の変化

最小二乗法の観測方程式を

$$\underset{mn}{A}\ \underset{n1}{X}=\underset{m1}{L}+\underset{m1}{V} \quad \cdots (2.\ 1)$$

とする，ここで

$\underset{mn}{A}$　は$\underset{n1}{X}$を関係づける　m×n個の行列，

$\underset{n1}{X}$　は　n個の期待値のベクトル

$\underset{m1}{L}$　は　m個の観測値のベクトル

$\underset{m1}{V}$　は　m個の観測値の観測誤差のベクトルを表す．

この観測値にそれぞれp_i（i＝1，2，・・・，m）なる　m個の重みをつけるため　m×mの行列　$\underset{m1}{P}$（対角要素がp1，p2，・・・，pmで他の要素がすべて0）なる重みの行列を用い　$\underset{m1}{X}$の期待値を求める．

このときの正規方程式は

$$\underset{nn}{S}\ \underset{n1}{X}=\underset{n1}{K} \quad \cdots (2.\ 2)$$

ただし

$$\underset{nn}{S}=\underset{nm}{A}^{t}\ \underset{mm}{P}\ \underset{mn}{A}\ ,\quad \underset{n1}{K}=\underset{nm}{A}^{t}\underset{mm}{P}\ \underset{m1}{L} \quad \cdots (2.\ 3)$$

これからXを求めると形式的に

$$\underset{n1}{X}=\underset{nn}{S}^{-1}\ \underset{n1}{K}$$

となる．

いま重みの行列Pの対角要素p_iが変化して，$p_i+\Delta p_i$　になったとき$\underset{n1}{X}$　が　$\underset{n1}{X}+\Delta\underset{n1}{X}$　となったとすると

$$(\underset{nn}{S}+\Delta\underset{nn}{S})(\underset{n1}{X}+\Delta\underset{n1}{X})=\underset{n1}{K}+\Delta\underset{n1}{K} \quad \cdots (5)$$

Influences of Weights on the Method of Least Squares
Kasio ISIKAWA
Tokyo Metropolitan University

ただし

$$\underset{nn}{\Delta S} = \underset{nm}{A^t}\underset{mm}{\Delta P}\ \underset{mn}{A},$$
$$\underset{n1}{\Delta K} = \underset{nm}{A^t}\underset{mm}{\Delta P}\ \underset{m1}{L} \qquad \cdots (6)$$

となる．

これより

$$\underset{nn}{S}\ \underset{n1}{X} + \underset{nn}{S}\Delta\underset{n1}{X} + \Delta\underset{nn}{S}\ \underset{n1}{X} + \Delta\underset{nn}{S}\Delta\underset{n1}{X} = \underset{n1}{K} + \Delta\underset{n1}{K}$$

$$\Delta\underset{n1}{X} = (\underset{nn}{S} + \Delta\underset{nn}{S})^{-1}(\Delta\underset{n1}{K} - \Delta\underset{nn}{S}\underset{n1}{X})$$
$$= (\underset{nn}{S} + \Delta\underset{nn}{S})^{-1}(\underset{nm}{A^t}\Delta\underset{mm}{P}\underset{m1}{L} - \underset{nm}{A^t}\Delta\underset{mm}{P}\underset{mn}{A}\ \underset{n1}{X})$$
$$= (\underset{nn}{S} + \Delta\underset{nn}{S})^{-1}\underset{nm}{A^t}\Delta\underset{mm}{P}(\underset{m1}{L} - \underset{mn}{A}\ \underset{n1}{X})$$
$$= (\underset{nn}{S} + \Delta\underset{nn}{S})^{-1}\underset{nm}{A^t}\Delta\underset{mm}{P}\ \underset{m1}{R}$$

ここで $\underset{m1}{R}$ は残差のベクトルで

$$\underset{m1}{R} = \underset{m1}{V}$$

である．

3．数値例

最小二乗法の特殊な場合として，下表のような，5個の観測値の平均値を求める問題の例を示す．

観測値 a_i	重み (1)	(2)	(3)	(4
2．7	1	1	1	10
2．8	1	1	1	1
3．1	1	2	10	1
3．2	1	1	1	1
3．3	1	1	1	1
平均	3.02	3 .03	3.07	2.8

（1）　$h = \sum_{i=1}^{5} p_i a_i / \sum_{i=1}^{5} p_i$

$\sum^5 p_i a = 15.1$

$\sum^5 p_i = 5$

$h = 3.02$

（2）　$\Delta p_3 = 1$

$\sum^5 \Delta p_3 r_3 = 1 \cdot 0.08$

$\sum^5 (p_3 + \Delta p_3) = 6$

$\Delta h = 0.08/6 = 0.0133$

$h + \Delta h = 3.03$

（3）　$\Delta p_3 = 9$

$\sum^5 \Delta p_3 r_3 = 9 \cdot 0.08$

$\sum^5 (p_3 + \Delta p_3) = 14$

$\Delta h = 0.72 / 14 = 0.0514$

$h + \Delta h = 3.07$

（4）　$\Delta p_1 = 9$

$\Delta p_1 r_1 = 9 \cdot (-0.32)$

$\sum^5 (p_1 + \Delta p_1) = 14$

$\Delta h = -0.2057$

$h + \Delta h = 2.81$

この例からも分かるように，同じ $\Delta p = 9$ でも（3）の場合では 0.05，（4）の場合では 0.21 と残差の違いにより期待値である平均値に大きく違いがでる．

4．結　び

最小二乗法において，重みの変化に対する期待値の変化は（7）式により略残差に比例する．

S^{-1}と$(S + \Delta S)^{-1}$が大きく変わらなければ，残差が小さいほど，すなわち観測精度が良いほど，期待値に与える影響は少ないことが分かる．比較的に残差が小さいときは，重みの影響は小さいから，それほど厳重に定める必要はない．