N角形領域を覆うような B-spline 曲面の生成方法

徳山 喜 政 う 野 晃 市 ††

N 角形領域に曲面を内挿する方法において,従来では,周りの面との連続性および内挿した複数の 面どうしの連続性を考慮し,N 角形領域をN 個の四辺形面で内挿している.しかし,N 角形領域の 境界曲線の長さが極端に異なる場合には,内挿で生成されたN 角形領域の境界曲線以外の曲線(こ こで,内部曲線と呼ぶ)がうねったり,互いに干渉したりする可能性がある.そのため,内挿した曲 面がうねったり,互いに干渉したりする可能性がある.この問題を解決するために,本論文では,N 角形領域を覆うような1枚の双3次B-spline曲面を生成する方法を提案する.N 角形領域の境界曲 線は生成した B-spline曲面のトリム曲線となり,指定した許容誤差範囲内で B-spline曲面上にのる.

Filling N-sided Region with a B-spline Surface

YOSHIMASA TOKUYAMA[†] and KOUICHI KONNO^{††}

To fill a n-sided region with surfaces by keeping some level of continuity with surrounding surfaces, the conventional methods use n four-sided patches joining with some level of continuity. However, if the lengthes of boundary curves are quitely unbalanced, the generated inner curves may undulate or intersect, and so may the generated surfaces. To solve this problem, this paper presents an approach to fill a n-sided region with a bi-cubic B-spline surface. The boundary curves of the n-sided region trim the generated B-spline surface and lie on the surface within user-specified tolerance.

1. はじめに

3次元 CAD システムにおいて,機械部品の強度補 強や外観の美しさの追及などの理由により,設計した モデルの稜線の両側の曲面をフィレット曲面で滑らか につなぐ操作が必要である.このような操作は一般的 にフィレット操作と呼ばれている.頂点に接続する複 数の稜線のそれぞれにフィレット操作を行うと,複数 のフィレット曲面が頂点の近傍で交差し,N角形領域 を構成する.一般的に,このN角形領域はぼかし領 域と呼ばれている.

従来,周りの面との連続性および内挿した四辺形面 どうしの連続性を考慮し,このN角形領域をN枚の四 辺形面で内挿する方法が提案されている.Chiyokura らは,N角形領域を G¹連続に内挿するための曲面表 現として Gregory パッチ¹⁾,有理境界 Gregory パッ

†† 岩手大学工学部情報システム工学科 Department of Computer and Information Science, Faculty of Engineering, Iwate University チ²⁾を提案した.Gregory パッチや有理境界 Gregory パッチは,曲面の境界導関数を *u*,*v* 各パラメータ方 向で独立に定義できる特徴を持つ.この特徴により, N 角形領域を *G*¹ 連続に内挿できる.Chiyokura ら が提案した手法は,N角形領域を構成する曲線のタ イプが(有理)Bezier 曲線である場合のみ有効であ る.Konno らは NURBS 曲線にも対応できるように, Gregory パッチを拡張した NURBS 境界 Gregory パッ チによる表現方法を提案した^{5),6)}.本論文では,これ らのタイプのパッチを Gregory 系パッチと呼ぶ.

これらの内挿方法において,周りの面との連続性お よび内挿した四辺形面どうしの連続性を考慮し,まず N角形領域をN本の内部曲線によってN個の四辺形 領域に分割し,それぞれの四辺形領域をパッチで内挿 する.内部曲線は内挿する曲面の形状に大きく影響す る.多くの場合において,高品質な内部曲線と内挿曲 面が得られるが,N角形領域の境界曲線の長さが極 端に異なる場合には,内挿で生成された内部曲線がう ねったり,互いに干渉したりする可能性がある.その ため,内挿した曲面がうねったり,互いに干渉したり する可能性がある.

Piegl⁷⁾らは N 角形領域を N 枚の NURBS 曲面の

[†] 東京工芸大学工学部画像工学科 Department of Image Engineering, Faculty of Engineering, Tokyo Institure of Polytechnics

集合で表現する方法を提案した.ただし,内挿した四 辺形面どうしの連続性は G^e 連続である.G^e 連続と は誤差範囲内で G¹ 連続を意味する.また,与えられ た1階横断導関数を近似し,周りの曲面との連続性は G^e 連続である.連続性の制約はそれほど厳しくない ので,内部曲線の生成において比較的に自由度がある. よって,内部曲線がうねらないように工夫することが できる.しかし,この方法には,内挿した四辺形面の 各境界付近にノットの間隔および制御点間の距離が非 常に小さいという欠点がある.このような曲面に対す る干渉計算などの操作は,数値計算が不安定であるた め,失敗する可能性がある.また,制御点を移動して 曲面を変形するような操作を行いにくい問題もある.

したがって,N角形領域の境界曲線の長さが極端に 異なる場合には,周りの面との G¹ 連続性および内 挿した四辺形面どうしの G¹ 連続性を維持しつつ,高 品質な内挿面を生成するのは困難である.そこで,本 論文では,従来の方法で高品質な内挿面を生成できな い場合には,周りの面との G¹ 連続性を犠牲にし,高 品質な内挿面を生成する方法を提案する.具体的に, N角形領域を覆うような1枚の双3次 B-spline 曲面 を生成する方法を提案する.N角形領域の境界曲線は 生成した B-spline 曲面のトリム曲線となり,指定し た許容誤差範囲内で B-spline 曲面上にのる.さらに, B-spline 曲面の内部連続性は C² 連続である.

2章では,N角形領域を Gregory パッチで内挿する ときの問題点を述べる.3章では,本論文で利用する 最小二乗法のアルゴリズムについて説明する.4章で は,N角形領域を覆うような1枚の B-spline 曲面の 生成アルゴリズムを説明する.5章では,4章で述べ る生成方法の応用例を示す.最後に,研究の成果につ いてまとめる.

2. Gregory パッチ内挿の問題点

ここで,図1の3角形面を例にして,非四辺形領域 における Gregory 系パッチの内挿手順⁹⁾を説明する. まず,3角形面の各境界曲線に対して,隣り合う面と の G¹連続条件により内部制御点を求める(図2). そして,これらの制御点を使って,3本の内部曲線を 発生させ,3角形面を3枚の四角形パッチに分割する (図3).最後に,隣り合う面とのG¹連続条件により 四角形パッチの内部制御点を求める(図4).

多くの場合において,この内挿方法で高品質な曲面 が得られるが,細長い領域の場合には高品質な曲面が 得られない可能性が高い.たとえば図5は,3本の稜 線に対してそれぞれ異なるフィレット半径で生成した



図1 3角形領域 Fig.1 Three-sided region.



図 2 内部制御点 Fig. 2 Inner control points.



Fig. 3 Inner curves.

3 角形領域を示す.この場合,3 角形領域の境界曲線 の長さは極端に異なっている.3 角形の領域には3つ のパッチが生成されるが,上記のアルゴリズムを用い て Gregory 系パッチで内挿すると,内部曲線が互い



図 4 内挿面の制御点 Fig. 4 Control points of the interpolated surfaces.



図5 3角形領域 Fig.5 Three-sided region.



Fig. 6 Inner curves generated in interpolation.

に干渉しているため、パッチどうしが互いに干渉して いる(図6,図7).また、図8の5角形領域に対し て Gregory 系で曲面を内挿すると、図9に示すよう な内部曲線が生成される.生成した内部曲線の共有点



Fig. 7 Iso-parametric curves of the generated surface.



図85角形領域 Fig.8 Five-sided region.



- - - -

は領域の外にはみ出しているため,意図した内挿曲面 が得られない(図10).

これらの現象は,周りの面との G¹ 連続性および内 挿した四辺形面どうしの G¹ 連続性を維持するために



図 10 生成した曲面の等パラメータ線表示 Fig.10 Iso-parametric curves of the generated surface.

発生する.すなわち,連続性を考慮しつつ,高品質な 内挿面を生成するように,内部曲線の接線ベクトルの 大きさや内部曲線の共有点の位置を決定するのは困難 である.

3. 最小二乗法による曲線または曲面のあて はめ

本論文では,N角形領域の外側に点群を発生し,最 小二乗法による3次のB-spline曲線または双3次の B-spline曲面のあてはめを行う.点群から曲線または 曲面を生成するほかの方法として,曲線補間法と曲面 補間法があげられる⁸⁾.しかし,曲線補間法または曲 面補間法で得られた曲線または曲面の制御点の数は与 えられた点の数に比例する.点の数が大量であれば, 補間した曲線または曲面の制御点の数が膨大になると いう欠点がある.そのため,本論文では最小二乗法を 利用する.ここで,最小二乗法を利用したあてはめ手 順を簡単に説明する³⁾.

- (1) 各点が曲線または曲面上でとるパラメータ値を 推定する.ここで,曲線の場合には,各隣り合 う点どうしのパラメータ間隔を点どうしの距離
 (弦長と呼ぶ)に比例させる方法を利用する⁸⁾. 曲面の場合には,後に述べる双1次 Coons 曲 面を利用して決める.なお,B-spline 曲線,Bspline 曲面の u, v 方向の初期のノットベクト ルを [0,0,0,0,1,1,1,1] とする.
- (2) 最小二乗法を解いて曲線または曲面の制御点を 求める.
- (3) 各点が曲線または曲面上でとるパラメータ値を 補正する
 得られた曲線または曲面に基づいて各点が曲線 または曲面上でとるパラメータを補正する⁴⁾.



図11 3角形領域 Fig.11 Three-sided region.

(4) 曲線または曲面と点との誤差を評価する. すべての点の誤差が指定した誤差より小さけれ ば,処理を終了する.そうでなければ,許容誤 差を超えた点が存在する区間の中央にノットを 挿入し,制御点を増やした後,ステップ(2)に 戻る.

なお,一般に点群の数に対する制御点の数の比率が 大きいと近似曲線または曲面に不要なうねりが生じや すくなるが,本論文では,点群が許容誤差内に収まっ ている制御点については座標を再計算しないので,近 似曲線または曲面のうねりを最小限におさえることが できる³⁾.

4. 曲面の生成方法

ここで,本研究における曲面の生成方法について説 明する.入力は,N角形領域とその領域を構成する複 数の境界曲線のうちの1つの境界曲線であり,出力は, 1枚の双3次B-spline曲面である.指定した境界曲線 が4.1節で述べる「曲面の領域を規定する4つの平面 の決定」の処理に利用される.ここで,図11の3角 形領域に対して底辺の境界曲線を指定した場合を例と して説明する.

本研究の方法は次に示す複数のステップにより構成 される.

- (1) 曲面の領域を規定する4つの平面の決定
- (2) N 角形の境界に基づいた線分の生成
- (3) 各平面に属する線分群の決定
- (4) 曲面の境界曲線の生成
- (5) 曲面の生成

次節でそれぞれのステップについて説明する.

4.1 曲面の領域を規定する4つの平面の決定

ここで,次のような手順により,生成しようとする



図 12 射影境界曲線列 Fig. 12 Projected boundary curve sequence.

曲面の領域を規定する4つの平面を決定する.

- (1) N角形領域の境界曲線列の中心と平均法線ベクトルを求める.境界曲線列の中心は曲線の制御点の座標値の平均値である.平均法線ベクトルとは,境界曲線を境界とする滑らかな任意の曲面上で面の単位ベクトルを積分したものである.この面積分の結果で得られるベクトルは境界曲線のみに依存する.本論文では,文献10)の方法を利用する.
- (2) 境界曲線列の中心と平均法線ベクトルを利用して平面を生成する.平面の原点と法線ベクトルはそれぞれ境界曲線列の中心と平均法線ベクトルである.
- (3) 境界曲線列を平面へ射影して射影境界曲線列を生成する(図12).
- (4) 平面上に XY 座標系を構成する.まず,平面の 原点と,入力として指定された境界曲線の射影 曲線との最短距離となる点を求める.そして, 平面の原点から最短距離となる点へ向かう単位 ベクトルを X 軸とする.Y 軸は平面の法線ベク トルと X 軸との外積ベクトルである(図12).
- (5) 座標系における射影曲線列のバウンディングボックスを得る.バウンディングボックスは X,Y
 軸に平行な四辺形である.
- (6) バウンディングボックスを若干大きくする.な ぜなら,最終的に生成される曲面がN角形領 域を覆う必要があるからである(図13).
- (7) バウンディングボックスから Z 軸に平行な 4 つの平面を得る(図 14).後で B-spline 曲面の境界を規定するときにこの 4 つの平面を利用する.ここで, Z 軸とは, X 軸と Y 軸との外積で得られた軸である.







図14 4つの平面 Fig.14 Four planes.

4.2 N角形の境界に基づいた線分の生成

各境界上に複数個のサンプリング点を生成する.こ こで,サンプリング点の数を(2×曲線の次数+1) とする.そして,サンプリング点における境界曲線を 横切る方向のベクトルを決める.最後に,境界曲線を 横切る方向のベクトルと4つの平面との交点を求め, 最も近い交点とサンプリング点で決まった線分を求め る.最も近い交点を持つ平面はその線分の属する平面 である.これらの線分は点群を発生させるときに利用 される.

サンプリング点における境界曲線を横切る方向のベ クトルの決め方として,たとえば次に示す2通りが考 えられる.

方法1

N 角形に隣接する面の境界曲線を横切る方向の偏 微分ベクトルを利用する.この方法を利用すれば, 生成した内挿面と隣接する面との接続がより滑ら かになる.図15はこの方法に基づいて発生した



図 15 点群発生用線分(その1) Fig. 15 Line segments for generating point set (1).



図 16 点群発生用線分(その2) Fig. 16 Line segments for generating point set (2).

線分を示す.ただし,図16のような場合には,N 角形に隣接する面の境界曲線を横切る方向の偏微 分ベクトルがすべて円柱の中心軸方向に向いてい るので,平面との交点が求まらない.そのため, 意図した内挿面が得られない.

方法 2

生成した内挿面と隣接する面との接続をより滑ら かにする必要がない場合には,境界曲線を横切る 方向のベクトルを柔軟に決められる.ここで,次 に示す手順を利用する.

- (1) 曲線の端点における横切る方向のベクトル を決定する.ここで,2つの場合に分けて 決定する.
 - 端点の両側の曲線が滑らかに接続している場合には,端点におけるそれぞれの曲線の接線ベクトルの方向が一致する.この場合,N角形領域の法線ベクトルと端点における接線ベクトルとの



図 17 点群の分割 Fig. 17 Division of point set.

外積で得られた単位ベクトルを,曲線の端点における横切る方向のベクトルとする.

- 端点の両側の曲線が滑らかに接続していない場合には,端点におけるそれぞれの曲線の接線ベクトルの方向が一致しない.この場合,N角形領域の法線ベクトルとそれぞれの端点における接線ベクトルとの外積で得られた2つの単位ベクトルの和ベクトルを,曲線の端点における横切る方向のベクトルとする.
- (2) 各曲線の中間サンプリング点における横切 る方向のベクトルを,両端点の横切る方向 のベクトルから1次補間して得られたもの とする.

方法1で意図した曲面が得られない場合には,方 法2を利用すればよい.図16は方法2に基づい て発生した線分を示す.なお,サンプリング点に おける境界曲線を横切る方向のベクトルの決め方 を変更することで,生成した曲面形状のバリエー ションを増やすことができる.

4.3 各平面に属する線分群の決定

最終的に,内挿曲面の各境界曲線は,4.1 節で求めた 4 つの平面の各平面に属する線分群の端点から生成さ れるので,各平面に属する線分群を決定する必要があ る.そこで,N角形領域の各境界曲線において,その 境界曲線から発生したすべての線分群が複数の平面に 属する場合には,境界曲線を分割し,さらに線分群が 属する複数の平面のうち,隣り合う平面の共通線分を 決める必要がある.たとえば,図16において,図17 のマーカ位置に境界曲線を分割し,共通線分を決める



図18 点群と補間曲線 Fig.18 Point set and interpolated curve.



Fig. 19 Intersection point with ruled surface.

必要がある.

ここで,次に示す方法で対象となる境界曲線の分割 を行う.

- (1) 各線分方向に点を生成する(図18).
- (2) 生成した点群を補間する曲線を生成する (図18).
- (3) 境界曲線と補間した曲線からルールド曲面を生 成する(図19).
- (4) ルールド曲面と隣り合う平面(図19の平面1と平面2)との交点を求める.
- (5) ルールド曲面における交点のパラメータを利用 して境界曲線上の分割点を求める(図19).
- (6) 境界曲線上の点と交点で決まった線分を2つの 平面の共通線分とする.
 - 4.4 曲面の境界曲線の生成

ここで,以下の手順で各平面上に曲面の境界曲線を 生成する.

(1) 各線分の一方の端点は元境界曲線のサンプリン



図 20 曲面の境界曲線 Fig. 20 Boundary curves of surface.

グ点であり,もう一方の端点は平面上の点である.ここで,3章で述べた最小二乗法を用いて平面上の点から曲線を生成する.生成した曲線の端点が隣り合う平面に存在しない場合には,曲線を接線方向に直線形状で隣り合う平面まで延長する.

- (2) 隣り合う平面上の曲線の端点どうしが必ず一致 するとは限らないので,端点どうしの位置を一 致させるように調整する.
- (3) 平面に属する曲線が存在しない場合には,両側の平面上に生成される曲線の端点位置を利用して直線を生成すればよい.たとえば,図20において,平面3に属する線分が存在しないので,曲線が生成されない.この場合,平面2と平面4に生成された曲線の端点を利用して平面3上の直線を生成する.
 - 4.5 曲面の生成

4.4 節で生成した 4 本の境界曲線を拘束条件として 曲面を生成する³⁾.生成手順を次に示す.

- (1) 線分から中間のサンプリング点を求める.図21に発生した線分上の点群を示す.
- (2) 境界曲線から双1次 Coons 曲面を定義する⁸⁾.
 この曲面上に射影した点のパラメータを各点の 初期パラメータとする.
- (3) 曲面の4本の境界曲線を拘束条件として3章で 述べた最小二乗法によるアルゴリズムで近似曲 面を生成する⁸⁾.
 - 5. 実施例

ここで,実施例を用いて本研究の手法の有効性を示す.ここで示すすべての例は許容誤差 0.01 を指定したものである.すなわち,生成した曲面と N 角形領



図 21 補間用点群 Fig. 21 Point set for interpolation.



図 22 生成した曲面の制御点 Fig. 22 Control points of the generated surface.





域の境界曲線上のサンプリング点との最大距離は 0.01 である.図5に示す形状に基づいて生成した曲面の制 御点を図22に示す.図23に生成した曲面の等パラ メータ線を示す.なお,サンプリング点における境界



図 24 生成した曲面の制御点 Fig. 24 Control points of the generated surface.



図 25 生成した曲面の等パラメータ線表示 Fig.25 Iso-parametric curves of the generated surface.



図 26 C^0 頂点が存在しない領域の生成例 Fig. 26 Example of a region without C^0 vertex.

曲線を横切る方向のベクトルの決め方として,4.2節の方法1を利用した.図7に比べて曲面形状が改善されたことが分かる.図8に示す形状に基づいて生成した曲面の制御点を図24に示す.図25に生成し



図 27 4角形領域の生成例 Fig. 27 Example of four-sided region.



図 28 5角形領域の生成例 Fig. 28 Example of five-sided region.

た曲面の等パラメータ線を示す.なお,サンプリング 点における境界曲線を横切る方向のベクトルの決め方 として,4.2節の方法2を利用した.図10に比べて 曲面形状が改善されたことが分かる.図26に図16 に基づいて生成した曲面の等パラメータ線を示す.こ の例の特徴として,N角形領域の境界曲線どうしの連 続性がすべて G¹連続である.これらの特殊なケース のほか,フィレット操作においてよく現れる4,5,6 角形のぼかし領域に本手法を,適用した例をそれぞれ 図27,図28,図29に示す.

6. ま と め

N 角形領域に曲面を内挿する方法において,従来で は,周りの面との連続性および内挿した四辺形面どう しの連続性を考慮し,N角形領域を複数の四辺形面で 内挿している.しかし,N角形領域の境界曲線の長さ が極端に異なる場合には,内挿で生成された内部曲線 がうねったり,互いに干渉したりする可能性がある.



図 29 6角形領域の生成例 Fig. 29 Example of six-sided region.

そのため,内挿した曲面がうねったり,互いに干渉し たりする可能性がある.これらの問題を解決するため に,周りの面との連続性は犠牲にしたうえで,N角形 領域を覆うような1枚の双3次B-spline 曲面を生成 する方法を提案した.生成したB-spline 曲面の内部 連続性は C² 連続である.周りの面との連続性は C⁰ 連続であるが,従来の内挿方法で高品質な曲面が得ら れない場合には,本手法は有効である.本論文で提案 した手法は(株)リコーで開発しているソリッドモデ リングツールキット DESIGNBASE⁹⁾に実装し,その 効果を確認した.

参考文献

- Chiyokura, H. and Kimura, F.: Design of solids with free-form surfaces, *Computer Graphics*, Vol.17, pp.289–298 (1983).
- Chiyokura, H., Takamura, T., Konno, K. and Harada, T.: G¹ surface interpolation over irregular meshes with rational curves, *NURBS* for Curve and Surface Design, Farin, G. (Ed.), pp.15–34, SIAM, Philadelphia (1991).
- 3) 古島終作,津曲 学,徳山喜政:整列されない点 群の B-spline 曲面への高速な近似,1994 年度精 密工学会秋季大会学術講演会講演論文集,pp.681-682 (1994).
- Hoschek, J. and Lasser, D.: Fundamentals of Computer Aided Geometric Design, A K Peters (1993).
- 5) 今野晃市,千代倉弘明: NURBS 境界 Gregory パッチによる自由曲面形状の内挿方法,情報処理学 会論文誌, Vol.35, No.10, pp.2203-2213 (1994).
- 6) Konno, K., Tokuyama, Y. and Ciyokura, H.: A G¹ connection around complicated curve meshes using C¹ NURBS Boundary Gregory Patches, Computer Aided Design, Vol.33,

pp.293-306 (2001).

- Piegl, L.A. and Tiller, W.: Filling n-sided regions with NURBS patches, *The Visual Computer*, Vol.15, pp.77–89 (1999).
- Piegl, L. and Tiller, W.: *The NURBS Book*, Springer-Verlag (1995).
- 9) 鳥谷浩志,千代倉弘明:3次元 CAD の基礎と応 用,共立出版 (1991).
- Ueda, K.: Mean normal vector to a surface bounded by Bezier curves, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.13, pp.441–451 (1996).

(平成 13 年 12 月 7 日受付)(平成 14 年 9 月 5 日採録)

徳山 喜政

昭和61年東京大学工学部産業機械 工学科修士課程修了(株)リコーソ フトウエア研究所を経て,現在,東京 工芸大学工学部助教授.CG,CAD, VRの研究に従事.博士(工学).映

像情報メディア学会,精密工学会各会員.



今野 晃市(正会員) 昭和 60 年筑波大学第三学群情報 学類卒業(株)リコーソフトウエ ア研究所,ラティス・テクノロジー (株)を経て,現在,岩手大学工学 部助教授.自由曲面の内挿法,形状

の圧縮手法,レンダリングアルゴリズム,並列処理ア ルゴリズム等の研究に従事.博士(工学).IEEE,映 像情報メディア学会各会員.