B-スプラインを用いた変数変換型数値積分

2X-3

秦野甯世　　秦野和郎
(中京大学)　　(愛知工業大学)

1．まえがき

定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ に対する変数変換型数値積分公式は，次のように表わされる．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$

ここで，$\phi'(t)$ として，両端 $t=\alpha,\beta$ において，任意次数の微係数が零となる関数を用いることにより，被積分関数 $f(x)$ が端点特異性を持つ場合でも有効な積分公式が提案されている．この変換として，IMT 型公式，二重指数関数型公式が知られている。この方法では，区間の両端で，急激に減衰し，中央付近での標本点が疎になってしまう。このために，中央で急激なピークや振動がある場合には良い結果が得られない．$\phi'(t)$ として，B-スプラインの線型結合を用いると，この点に融通性を持たせることができる。ここでは，この方法による数値実験による誤差，及び数値積分の結果を報告する．

2．B-スプライン

閉区間 $[a,b]$ で B-スプライン $N_{j,k}(x)$ を次のように定義する．まず，$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ とし，

$$t_j=\begin{cases} x_0 & : -k+1 \leqq j \leqq -1 \\ x_j & \quad 0 \leqq j \leqq n \\ x_n & \quad n+1 \leqq j \leqq n+k-1 \end{cases}$$

とする。次に

$$g_k(t;x) = (t-x)_+^{k-1} = \begin{cases} (t-x)^{k-1} & : t \geqq x \\ 0 & : t < x \end{cases}$$

として，

$$N_{j,k}(x) = (t_{j+k}-t_j)\,g_k[t_j, t_{j+1}, \cdots, t_{j+k}; x]$$

である。ここで $g_k[t_j, t_{j+1}, \cdots, t_{j+k}; x]$ は，x をパラメータとする t に関する関数 $g_k(t;x)$ の $t=t_j, t_{j+1}, \cdots, t_{j+k}$ における k 次差商である．この関数は，$x=t_j,\ t_{j+k}$ において 0 と $k-1$ 次の接触をなす．この関数の線型結合，

$$S(x) = \sum_{j=-k+1}^{n-1} C_j N_{j,k}(x), \quad C_j = 0 : -k+1 \leqq j \leqq -1,\ n-k+1 \leqq j \leqq n-1$$

は，$x=a, b$ において 0 と $k-1$ 次の接触をなす。

3．B-スプラインによる変数変換型積分公式

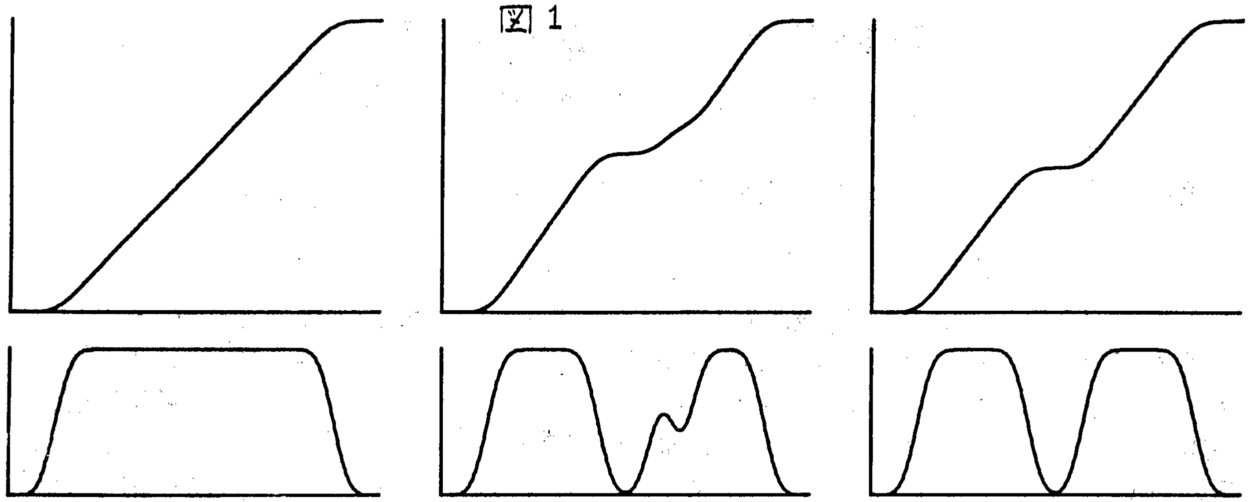
$\phi'(t)$ 及び $\phi(t)$ を $k-1$ 次の B-スプラインの線型結合として次のように表わす。

$$\phi'(t) = \sum_{j=0}^{n-k} C_j N_{j,k}(t), \quad \phi(t) = \sum_{j=0}^{n-k} C_j \int N_{j,k}(t)\,dt$$

Numerical Quadrature by Variable Transformation using B-splines
Yasuyo Hatano (Chukyo Uni.)
Kazuo Hatano (Aichi Instute of Technology)

k=6のときの $\phi'(t)$ と $\phi(t)$ を一例として，図1に示す．n, C_j をいろいろ変えることによって，重み関数と標本点関数の形を変えることができる．

図1



$\phi'(t)$ は両端で $k-2$ 次までの微係数が零になり，$k-1$ 次微係数は零でない．$\phi'(t)$ に対して位数 k，線型結合係数 C_j，接点の個数 n 及び位置についての自由度がある．重み関数 $\phi(t)$，標本点関数 $\phi'(t)$ を，被積分関数 $f(x)$ の挙動に応じて変更することができる。

3．誤差の性質

台形公式による数値積分の誤差は次のように表わされる．

$$\int_{x_0}^{x_0+Nh} F(x)\,dx - h\sum_{j=0}^{N}{}'' F(x_0+jh) = 2\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2i}\zeta(2i)\left\{F^{(2i-1)}(x_0+Nh)-F^{(2i-1)}(x_0)\right\}$$
$$+\,2(-1)^m\left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{2m}}\int_0^{Nh}F^{(2m)}(x_0+y)\cos\frac{2\pi i y}{h}\,dy$$

ここで，変数変換型公式を使うときは，

$F(x)=f(\phi(t))\phi'(t)$ となる．$2m+1$ 次以上のスプライン関数を用いれば，右辺第一項は常に零となる．従って，このときの誤差は少なくとも，$O(h^{2m})$ となる．一例として $f(x)$ を e^{-x}：[0, 1] とし，スプラインの位数 $k(=2m)=4, 6, 8, 10, 20$ について，分割数 N をいろいろ変えて誤差を計算した．結果を図2に示す．図2から誤差が $O(h^k)$ 程度であることがわかる．

4．むすび

この方法では，接点の数 n，位置 x_j，位数 k，線型結合係数 C_j を $f(x)$ の挙動に応じて変えることができるが，どのようにすると良い結果が得られるのかを検討することは，今後の課題である．

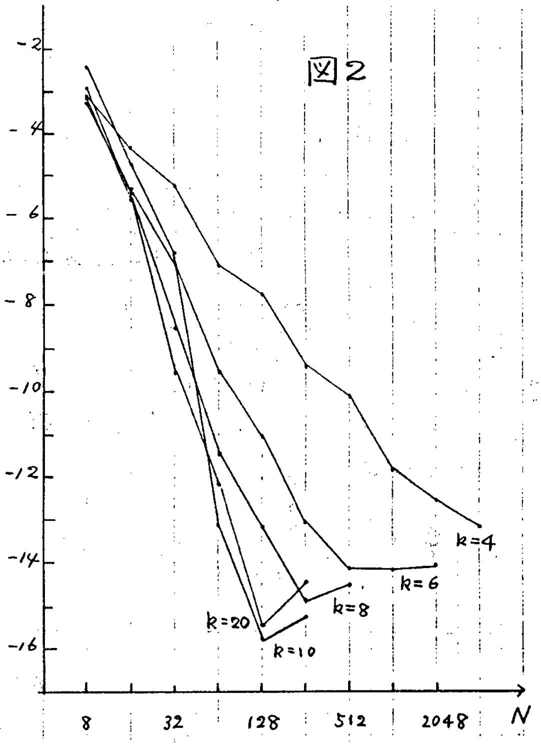


図2