4X-10

Ｎａｒｒｏｗｉｎｇの意味論と論理プログラミングへの応用

山本　章博

（九州大学　総合理工学研究科）

1．はじめに

Narrowingは等式論理に基づく拡張ユニフィケーションの基本手続きである．論理プログラムのユニフィケーションを拡張する方法は，関数記法を導入するなどの目的で数多くの提案がされている．Hullot[3]は等式集合を項書き換えシステムとみなすとき，narrowingの繰り返しと恒等公理を用いることによりユニファイアの完備集合が得られることを示している．完備集合は従来のｍｇｕに相当するから，ＳＬＤ導出におけるｍｇｕを完備集合でおきかえることが考えられる．しかし，完備集合は一般に無限集合であるため，この考え方をそのまま実現すると，ＳＬＤ導出が一向に進展しない事態が生じる．また，プログラムの不動点意味論はHerbrand基底の商集合を用いるので，narrowingについて記述できない．

本稿では，narrowingのHerbrand基底を用いた不動点意味論を明らかにし，narrowingとＳＬＤ導出の整合を考察する．そして確定節に制限をおくことにより，確定節と等式からなるプログラムに対して，narrowingとＳＬＤ導出を同等な手続きとする反駁を与える．この反駁を用いると，ユニフィケーションの一部を待避させＳＬＤ導出を優先させて無限探索を回避する方法などが考えられる．また，Herbrand基底を用いた不動点意味論を与え，等式に[3]と同様の条件を与えて反駁の完全性を議論する．

2．NarrowingとHerbrand基底

Ｂ(Ｌ)を一階言語Ｌに関するHerbrand基底とする．等式とは$\alpha=\beta$という形のアトムである．等式集合Ｅは，その元に"左辺→右辺"という向きをつけて項書き換えシステムとみなせるものとする．Ｅを項書き換えシステムとみたとき，$\rightarrow_E$でＥに関するリダクション関係を表す.さらに等式論理の推論規則を次の確定節集合ＥＱで表す．

$$
\begin{aligned}
EQ = \{&X=X\leftarrow \text{（恒等公理節）}\} \\
&\cup\{X=Y\leftarrow Y=X\}\cup\{X=Z\leftarrow X=Y, Y=Z\} \\
&\cup\{f(X_1,\ldots,X_n)=f(Y_1,\ldots,Y_n)\leftarrow X_1=Y_1,\ldots,X_n=Y_n \\
&\qquad :f\text{は言語}L\text{の任意の関数記号}\} \\
&\cup\{p(X_1,\ldots,X_n)\leftarrow X_1=Y_1,\ldots,X_n=Y_n, p(Y_1,\ldots,Y_n) \\
&\qquad :p\text{は言語}L\text{の'='ではない任意の述語記号}\}
\end{aligned}
$$

<u>定義１</u>　等式集合Ｅに対して,アトム間の２項関係$\rightsquigarrow_E$を次のように定義し，Ｅに関するnarrowing関係とよぶ．

$M \rightsquigarrow_E N$

$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$

Ｍの変数でない部分項tと，Ｅの等式のバリアント$\alpha=\beta$，αとtのｍｇｕθが存在して,$N=(M[t\leftarrow\beta])\theta$である．ただし，$\mathrm{var}(\alpha)\cap\mathrm{var}(M)=\phi$である．

Narrowingはリダクションによる計算を拡張したものであり，ＳＬＤ導出に類似している．従って，論理プログラムへ関数記法を導入するために利用できると考えられる．そのためにnarrowingの不動点意味論を明らかにする．

論理プログラムＰの特徴は，$2^{B(L)}$上の関数T_Pを

$$
\begin{aligned}
T_P(I)=\{A\in B(L):\ &A'\leftarrow B_1,\ldots,B_q\in P\text{と} \\
&\text{代入}\theta\text{が存在して，}A=A'\theta\text{かつ} \\
&B_1\theta,\ldots,B_q\theta\in B(L)\}
\end{aligned}
$$

と定義することにより，その最小不動点がＰの最小モデルＭ(Ｐ)に一致することである．そこで，等式集合Ｅに関するnarrowingに対しても，$2^{B(L)}$上の関数N_Eを

$$
\begin{aligned}
N_E(I)=\{p(t_1,\ldots,t_m)\in B(L):\ &p(t_1,\ldots,t_m)\in I \\
&\text{または，ある引数}t_i\text{が存在して} \\
&t_i\rightarrow_E s_i,\ p(t_1,\ldots,s_i,\ldots,t_m)\in I\}
\end{aligned}
$$

と定義する．すると，N_Eは連続であり，その不動点とＥ∪ＥＱの最小モデルに関して論理プログラムと同様の関係が成立する．すなわち，[3]の手続きが恒等公理節だけを用いることから,Ｔ(Σ)をグランド項全体の集合として，

$N_E\uparrow 1=\{s=s : s\in T(\Sigma)\}$, $N_E\uparrow(k+1)=N_E(N_E\uparrow k)$,
$N_E\uparrow\omega=\cup_{k\in\omega}(N_E\uparrow k)$

とおくと，次の補題が成立する．

<u>補題１</u>　Ｅがグランド項について合流性をもつ

$\Leftrightarrow$

$N_E\uparrow\omega=M(E\cup EQ)$.

3．Narrowingと論理プログラム

前節の意味論を考慮すると，narrowingを論理プログラムに導入するときには，ユニフィケーションは等式として確定節の本体に明示すればよい．そのために，等式以外の確定節を[1]の斉確定節に制限する．斉確定節とは，

$$p(X_1,\ldots,X_m)\leftarrow B_1,\ldots,B_n$$

という形の確定節である．ただし，p≠'='で,$X_1,\ldots,X_m$は相異なる変数である．このとき，等式に関する公理が別に必要になるが，従来の論理プログラムでは恒等公理節だけ十分であり，それはnarrowingによるユニフィケーションに用いる公理と一致する．

<u>定義２</u>　Ｅを等式集合，Ｐを斉確定節の集合とするとき，$Pr=E\cup P\cup\{X=X\leftarrow\}$をプログラムという．なお，ＥをE(Ｐr)で，$P\cup\{X=X\leftarrow\}$をP(Ｐr)で表す．

このプログラムを用いてゴール節$\leftarrow A_1,\ldots,A_k$からの導出を定義する．この導出では，P(Ｐr)の斉確定節を用いたレゾリューションと，E(Ｐr)の等式を書き換え規則としたnarrowingが同等な手続きとなり，論理プログラムでの関数記法が可能となる．

The Semantics of Narrowing and its Application to Logic Programming
Akihiro YAMAMOTO
KYUSHU Univ.

<u>定義３</u>　Ｐｒをプログラム，Ｇをゴール節とするとき，ＧからのＰｒ上の導出とは，次の４条件を満たす３つ組 $<G_i, \theta_i, C_i>$ $(i=0,1,\ldots)$ の列である．

1) G_i はゴール節，θ_i は代入，C_i はＰｒの斉確定節または等式のバリアントである．

2) $var(C_i)\cap(\cup_{j=0}^{i-1}(var(<G_j, \theta_j, C_j>)))=\phi$

3) $C_{i+1}\in P(Pr)$ のとき，G_{i+1} はｍｇｕ θ_{i+1} を用いた G_i と C_{i+1} のレゾルベントである．

4) $C_{i+1}\in E(Pr)$ のとき，G_{i+1} は C_{i+1} とｍｇｕ θ_{i+1} を用いて $G_i \rightsquigarrow_{E(Pr)} G_{i+1}$ を満たす．

ゴール節内の等式をレゾルブするのは恒等公理節だけである．Ｐｒの他の等式は全てE(Ｐｒ)に含まれており，書き換え規則として用いられることに注意されたい．また，従来の確定節 $p(t_1,\ldots,t_m)\leftarrow B_1,\ldots,B_n$ を用いて拡張ユニフィケーションによるレゾリューションを行う手続きは，斉確定節 $p(X_1,\ldots,X_m)\leftarrow X_1=t_1,\ldots,X_m=t_m,B_1,\ldots,B_n$ を用いて定義３の導出を繰り返すことによりシュミレートできる．しかも，そのとき得られるゴール節内のアトムの順序を入れ換えて等式以外のアトムを次の導出の対象にすれば，拡張ユニフィケーションを待避させてレゾリューションを行うことに相当する手続きになる．

<u>定義４</u>　ＧからのＰｒ上の反駁とは，空節□で終了する有限な導出 $\{<G_i, \theta_i, C_i>\}_{i=0}^{n}$ である．このとき，代入 $\theta=\theta_0\cdots\theta_n|_{v(G)}$ をその反駁の計算解という．

<u>例</u>　Ｐｒ＝

$$\left.\begin{array}{l}\{\mathrm{append}([\,],X)=X\leftarrow\\ \quad\mathrm{append}([A|X],Y)=[A|\mathrm{append}(X,Y)]\leftarrow\end{array}\right\}E(Pr)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{member}(X,Y)\leftarrow Y=[X|Z]\\ \mathrm{member}(X,Y)\leftarrow Y=[Z|W],\mathrm{member}(X,W)\\ X=X\leftarrow\}\end{array}\right\}P(Pr)$$

とするとき，ゴール節 $\leftarrow\mathrm{member}(1,\mathrm{append}([2],[3|X]))$ からの反駁の計算解には，$\theta_1=\{X\leftarrow[1|Y]\}$，$\theta_2=\{X\leftarrow[1,Y|Z]\}$ などがある．

定義４で与えた反駁が論理的に正当であり，従来の論理プログラムと同様に計算解を正しい計算とみなしてよいことは次の定理が保証する．

<u>定理１</u>　ゴール節 $G:\leftarrow A_1,\ldots,A_k$ からの反駁で得られた計算解 θ は正解である．すなわち，次が成り立つ．

$$Pr\cup EQ \models \forall((A_1\wedge\ldots\wedge A_k)\theta).$$

4．プログラムの不動点意味論

前節で定義したプログラムのＢ(Ｌ)を用いた不動点意味を記述するためには，プログラムＰｒに対して，

$$S_{Pr}(I)\equiv N_{E(Pr)}(I)\cup T_{P(Pr)}(I)$$

という関数を導入すればよい．この S_{Pr} は連続関数である．恒等公理節がP(Ｐｒ)に含まれることから，

$$S_{Pr}\uparrow 0=\phi,\ S_{Pr}\uparrow(k+1)=S_{Pr}(S_{Pr}\uparrow k),$$
$$S_{Pr}\uparrow\omega=\cup_{k\in\omega}(S_{Pr}\uparrow k)$$

とおくと，$S_{Pr}\uparrow\omega$ は S_{Pr} の最小不動点である．

<u>補題２</u>　$S_{Pr}\uparrow\omega$ の中で，述語記号が'='のアトム全体の集合を $E\omega$ と表す．$E\omega=M(E(Pr)\cup EQ)$ が成立しているならば，$S_{Pr}\uparrow\omega$ はＥＱのモデルである．

補題１，２をあわせると，S_{Pr} の最小不動点とＰｒ∪ＥＱの最小モデルに関して次の定理が得られる．

<u>定理２</u>　E(Ｐｒ)がグランドな項について合流性を持つならば，$S_{Pr}\uparrow\omega=M(Pr\cup EQ)$ である．

5．反駁の完全性

Ｐｒの成功集合suc(Ｐｒ)とは，$\{A\in B(L):\leftarrow A$ からのＰｒ上の反駁が存在する$\}$である．反駁の正当性と完全性の議論は，1)正解と計算解，2)充足不能性，3)最小モデルと成功集合，の３点から議論しなければならない．正当性に関しては，計算解の正当性を用いることにより，充足不能性と成功集合に関する正当性を示す次の補題とその系を与えることができる．

<u>補題３</u>　ゴール節Ｇからの反駁が存在すれば，Ｐｒ∪ＥＱ∪{Ｇ}は充足不能である．

<u>系</u>　$suc(Pr)\subset M(Pr\cup EQ)$.

反駁の完全性に関する議論は，E(Ｐｒ)が合流性と停止性の両方を備えている(これを標準的であるという)という条件のもとで行う．このとき，任意の項の正規形が一意に存在することから，Kanamori[2]におけるnarrowingの"projectable"に関する定理と従来の論理プログラムにおける"Lifting Lemma"を融合した補題が証明できる．補題の詳細はここでは省略するが，この補題を用いると，「最小モデルと成功集合」と「充足不能性」に関して完全性を示すことができる．

<u>定理３</u>　E(Ｐｒ)が標準的であるとき次が成立する．

$$M(Pr\cup EQ)=S_{Pr}\uparrow\omega=suc(Pr).$$

<u>系</u>　E(Ｐｒ)が標準的であるとき，ゴール節Ｇについて Ｐｒ∪ＥＱ∪{Ｇ}は充足不能であれば，ＧからのＰｒ上の反駁が存在する．

さらに，計算解に関する完全性は，Ｅ∪ＥＱによる同値関係によって同値となる代入を同一視することにより成立するので，厳密にはＥ完全とよぶべきものである．

<u>定理４</u>　E(Ｐｒ)が標準的であるとき，ゴール節Ｇの任意の正解 θ に対してある計算解 μ と代入 γ が存在して，Ｇ内の任意の変数Xに対して $E(Pr)\cup EQ\models X\theta=X\mu\gamma$ が成立する．

6．おわりに

上に述べた反駁を実現する場合には計算規則の扱いが問題となる．現在，narrowingの対象となる項の探索の規則をPrologの計算規則に加えることによって反駁システムを実現している．しかし，narrowingがＳＬＤ導出のサブルーチンでしかない導出と両者が同等な導出との違いは，計算規則によって明らかになるのだから，停止性や否定の扱いとも関連させてより多くの規則を導入せねばならない．さらに，条件をもつ等式を用いて導出を拡張することも今後の課題である．

［参考文献］

[1] van Emden, M.H. & Lloyd, J.W.: A Logical Reconstruction of PrologⅡ, J.Logic Programming, vol 1, 143-149(1984).

[2] Kanamori, T.: Computation by Meta-Unification with Constructors,「記号論理学と情報科学」研究会資料(1985).

[3] Hullot, J.M.: Canonical Forms and Unification, LNCS 87,318-334(1980).

[4] Yamamoto, A.: Logic Programming with Narrowing「ソフトウェア科学，工学における数理的方法」研究集会資料(1986).