

空間として定義できる。

基本領域のうち Bool' は $\{0, 1\}$, Var' , Lab' , Val' は適当な無限集合とする。Exc' の定義が本質的であり、以下これについて述べる。

(注) $:=, \Rightarrow$ は各右辺で左辺を定義することを表す。

1) Exc' の定義

$\text{Labl} := \{ \langle 0, \langle \rangle \rangle, \langle 1, \langle \rangle \rangle \} \cup \{ 2, 3 \} * \text{Lab}'$. $\text{Val}'' := \text{Val}' \cup \{ \langle \rangle \}$. $\text{Lab}'' := \text{Labl} \cup \text{Val}'' \cup \text{Stt}'$. ここで $\langle \rangle$ は適当な集合。

H を $\omega \sqsubseteq H$ で、順序対に付いて閉じているような十分広い集合とし、BD を次のように定義する。

$\text{BD} := \{ \langle \langle t, \text{od} \rangle, \text{lab} \rangle \mid t \sqsubseteq H \wedge \langle t, \text{od} \rangle \text{ は深さ高々 } \omega \text{ の tree } \wedge \text{lab}: t \rightarrow \text{Lab}'' \}$.

$t' = \langle t, \text{lab} \rangle = \langle \langle t, \text{od} \rangle, \text{lab} \rangle$ に対して、 $\text{dp}(t', a)$ は t' における a の深さ、 $\text{Succ}(t', a)$ は t' における a の直後の元の集合、 $\text{FSeg}(t', a) := \{ b \in t' \mid \langle a, b \rangle \in \text{od} \}$, $a \leq b := b \in \text{Succ}(t', a)$, $\text{prd}(a)$ は a の直前の元、 $\text{lt}' := \text{lab}(\text{root}(t'))$, $\text{Sbtr}(t', n) := \{ a \in t' \mid \text{dp}(t', a) \leq n \}$, $\equiv$ は label を保存する順序同型があるという BD 上の同値関係、 $\neq$ は $\equiv$ による同値類、 chl は $\{ X \sqsubseteq \text{BD} \mid X \neq \emptyset \}$ 上の選択関数、 $\text{fst}(\langle a, b \rangle) := a$, $\text{s}[v/x] := s - \{ \langle x, s(x) \rangle \} \cup \{ \langle x, v \rangle \}$ とする。

【定義1. Exc'】 BD の要素 $\langle t', \text{lab} \rangle$ で次の条件を満たすものの全体を Exc' とする。

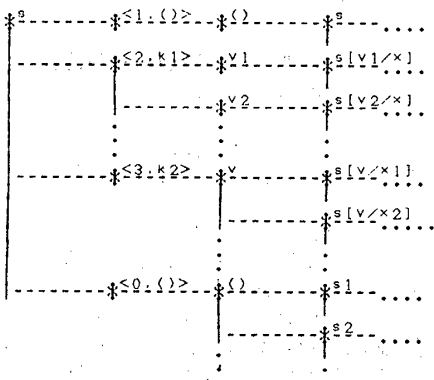
(C1) $\forall a \in t' \text{ dp}(t', a) = 0 \pmod 3 \Rightarrow \text{lab}(a) \in \text{Stt}' \wedge \text{dp}(t', a) = 1 \pmod 3 \Rightarrow \text{lab}(a) \in \text{Labl} \wedge \text{dp}(t', a) = 2 \pmod 3 \Rightarrow \text{lab}(a) \in \text{Val}''$.

(C2) $\forall a \in t' \text{ dp}(t', a) = 0 \pmod 3 \Rightarrow \#(\text{Succ}(t', a)) \leq \#(\omega) \wedge \forall b \in \text{Succ}(t', a) [\text{fst}(\text{lab}(b)) = 1 \Rightarrow \text{lab}(\text{Succ}(t', b)) = \{ \langle \rangle \} \wedge \forall c \in \text{Succ}(t', b) [0 < \text{dp}(t', c) \leq \#(\omega)]] \wedge \text{fst}(\text{lab}(b)) = 2 \Rightarrow \text{lab}(\text{Succ}(t', b)) = \text{Val}' \wedge \exists X \sqsubseteq \text{Var}' [0 < \#(X) \leq \#(\omega) \wedge \forall c \in \text{Succ}(t', b) [\text{lab}(\text{Succ}(t', c)) = \{ \text{lab}(a)[\text{lab}(c)/x] \mid x \in X \}]] \wedge \text{fst}(\text{lab}(b)) = 3 \Rightarrow \text{lab}(\text{Succ}(t', b)) \sqsubseteq \text{Val}' \wedge 0 < \#(\text{lab}(\text{Succ}(t', b))) \leq \#(\omega) \wedge \forall c \in \text{Succ}(t', b) [\text{lab}(\text{Succ}(t', c)) = \{ \text{lab}(a)[\text{lab}(c)/x] \mid x \in \text{Var}' \}]]]$.

(C3) $\forall a \in t' \text{ dp}(t', a) = 0, 1 \pmod 3 \Rightarrow \forall k \in \text{lab}(\text{Succ}(t', a)) [\exists ! b \in \text{Succ}(t', a) [\text{lab}(b) = k] \wedge \text{dp}(t', a) = 2 \pmod 3 \Rightarrow ((\text{lab}(\text{prd}(a)) = \langle \rangle \Rightarrow \forall k \in \text{lab}(\text{Succ}(t', a)) [\exists ! b \in \text{Succ}(t', a) [\text{lab}(b) = k]] \wedge (\text{lab}(\text{prd}(a)) \neq \langle \rangle \Rightarrow \forall b_1, b_2 \in \text{Succ}(t', a) [b_1 \neq b_2 \Rightarrow \text{FSeg}(t', b_1) \neq \text{FSeg}(t', b_2)]]]]$.

(C4) $\langle t', \text{lab} \rangle = \text{chl}(\langle t', \text{lab} \rangle / \equiv)$.

図1にExc' の要素の例を示す。



(注) * は tree の node を、-- で接続された2つ node は右側が大であることを表す。node 上の文字は label を表す。

図1. Exc' 要素の例

2) Prg' の定義

【定義2. Prg'】 ① root の label が一致するような BD 要素の族 $\{ i \in I, p(i) \} = \{ \langle i, p(i) \rangle \mid i \in I \}$ に対して、 $\Sigma(i \in I, p(i))$

を全ての $p(i)$ の root のみ重ね合わせて作った BD の要素とする。② $k \in \text{Lab}''$ に対して、 $k \# t'$ を root の label を k とし、その後続に t' を接続したものと看做する。③ Exc' の定義より、 $t' = \langle t', \text{lab} \rangle \in \text{Exc}'$ について、 $\forall s \in \text{Stt}', \exists ! a \in t', \exists b, c [\text{root}(t') \# b \# c \# a \wedge \text{lab}(b) = \langle \rangle, \langle \rangle \wedge \text{lab}(c) = \langle \rangle \wedge \text{lab}(a) = s]$. この a を $\text{reach}(t', s)$ とする。④ $\text{Prg}' := \{ p \in (\text{Stt}' \rightarrow \text{Exc}') \mid \forall s, s_1 \in \text{Stt}' [\text{FSeg}(p(s), \text{reach}(p(s), s_1)) = p(s_1)] \}$.

3.2. 完備距離空間としてのExc', Prg'

【補題1.】

$\text{mt}: \text{Exc}'^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ を次のように定義すると、 mt は Exc' 上の完備距離となる。各 $t_1'', t_2'' \in \text{Exc}'$ に対して、

(case1) root の label が一致しない $\Rightarrow \text{mt}(t_1'', t_2'') = 2$.

(case2) $\exists n \in \omega [\text{Sbtr}(t_1'', n) \neq \text{Sbtr}(t_2'', n)] \Rightarrow$

$\text{mt}(t_1'', t_2'') = (1/2)^{n_0}$; where n_0 is the least n such that $\text{Sbtr}(t_1'', n) \neq \text{Sbtr}(t_2'', n)$.

(case3) その他の場合、 $\text{mt}(t_1'', t_2'') = 0$.

また $\text{mt}'(p_1, p_2) := \sup \{ \text{mt}(\text{pl}(s), \text{p2}(s)) \mid s \in \text{Stt}' \}$ と定義すると、 mt' は Prg' 上の完備距離となる。縮小写像 $f: \text{Exc}' \rightarrow \text{Exc}'$, $g: \text{Prg}' \rightarrow \text{Prg}'$ は各 unique な不動点をもつ。以下の定義の定義可能性の多くはこのことから導かれる。

3.3. Exc' 上の関数記号・述語記号の解釈

ここでは Exc' 上で解釈すべき記号のうち最も本質的な par の解釈の概略を述べる。

【定義3.】 BD 要素の(縮退)正規性

① BD の要素で3.1の(C3)を満たすものを(縮退)正規という。

② 正規な BD 要素の族 $\{ j \in J, p(j) \}$ に対して、 $j_1 \sqsubseteq j$ を $\forall j \in J, \exists ! j_1 \in J [p(j) = p(j_1)]$ なるように選び、 $\Sigma^*(j \in J, p(j)) := \text{chl}(\Sigma(j \in J, p(j)) / \equiv)$ と定義する。

■ $\Sigma^*(j \in J, p(j))$ は正規である。

【定義4. Par】 par の解釈

$t_1 \equiv \Sigma(\Sigma(k \in K_1, s_0 \# \Sigma(v \in \text{Var}', \langle 2, k \rangle \# \Sigma(s \in S_1(k, v), v \# \text{pl}''(k, v, s))))), s_0 \# \langle \rangle \# \Sigma(s \in \text{Stt}', \langle \rangle \# \text{pl}''(s)))$.

$t_2 \equiv \Sigma(\Sigma(k \in K_2, s_0 \# \Sigma(v \in X(k), \langle 3, k \rangle \# \Sigma(s \in S_2(k, v), v \# \text{p2}''(k, v, s))))), s_0 \# \langle \rangle \# \Sigma(s \in \text{Stt}', \langle \rangle \# \text{p2}''(s)))$.

と表現できる場合、 $\text{Par}(t_1, t_2)$ を次式が成り立つように定義する。(一般の場合はこの拡張である。)

$\text{Par}(t_1, t_2) = \Sigma(s_0 \# \langle \rangle \# \Sigma^*(j \in J, \langle \rangle \# \text{Par}(\text{pl}''(j), \text{p2}''(j))))$,
 $\Sigma(k \in K_1, s_0 \# \Sigma(v \in \text{Var}', \langle 2, k \rangle \# \Sigma(s \in S_1(k, v), v \# \text{Par}(\text{pl}''(k, v, s), \text{p2}''(s))))$,
 $\Sigma(k \in K_2, s_0 \# \Sigma(v \in X(k), \langle 3, k \rangle \# \Sigma(s \in S_2(k, v), v \# \text{Par}(\text{pl}''(s), \text{p2}''(k, v, s))))$,
 $s_0 \# \langle \rangle \# \Sigma(s \in \text{Stt}', \langle \rangle \# \text{Par}(\text{pl}''(s), \text{p2}''(s)))$.

ここで $J := \{ \langle k, v, s \rangle \mid k \in K_1 \cap K_2 \wedge v \in X(k) \wedge s \in S_1(k, v) \cap S_2(k, v) \}$.

3.4. Guarded Term に対する再帰的定義可能性の解釈

Prg 型変数として $P_1, \dots, P_n$ のみをもつような Prg 型 term T に対して、各 P_i に $p_i \in \text{Prg}'$ を割り当てたときの T における値を $[T]$ とする。 $\langle \rangle$; $\langle \rangle$; $[,]$; $\langle \rangle$; $\langle \rangle$; $[,]$; の解釈とすると、各 f, k, x, e に対して、 $\langle f \rangle$; $\langle k, x \rangle$; $[k, e]$; は $\text{Prg}' \rightarrow \text{Prg}'$ の縮小写像である。よって guarded term $G_1, \dots, G_n$ に対して $\langle p_1, \dots, p_n \rangle \mapsto \langle [G_1], \dots, [G_n] \rangle$ は $\text{Prg}'^n \rightarrow \text{Prg}'^n$ の縮小写像となる。従って再帰的定義可能性公理の各式が成り立つ。

4. おわりに

本稿では、並行システムの記述・検証のための形式的理論として内部状態の変化・外部とのインタラクション時間順序の両者について、記述とそれについての検証が可能な体系 TCS を提案し、また tree を用いたその T の構成の概略を示した。

TCS と CCS, 及び TCS と Ada 等の「ツラツキ」言語の形式理論上・ T 上での関係の明確化は今後の課題である。

参照 1) Milner, R: "A Calculus of Communicating Systems", Springer LNCS Vol. 92, (1980). 2) Hennessy, M et al. "Full abstraction for a simple parallel programming language", Springer LNCS Vol. 74, (1980).