

1次元再帰シフトトラス相互結合網の拡張

井口 寧[†] 堀口 進^{††}

1次元SRT(Shifted Recursive Torus)網は、リング結合網に長さ異なるバイパスリンクを再帰的に付加して構成される、階層構造を有する結合網である。本論文では、従来の1次元SRT網におけるバイパスリンクが定義されていないノードに、冗長なバイパスリンクを付加することにより、通信性能を高めた派生型の1次元SRTを提案する。バイパスリンクの付加の方法によって、2種類の派生型SRTが定義される。従来の1D-SRTにおける再帰ルーティングを拡張して、拡張ルーティングアルゴリズムを示し、直径を導出する。派生型1D-SRTのネットワーク性能を評価したところ、拡張型のSRT網は、ノード数が多い場合に直径が大幅に短縮できることが分かった。

Improving One Dimensional Shifted Recursive Torus Interconnection

YASUSHI INOGUCHI[†] and SUSUMU HORIGUCHI^{††}

Shifted Recursive Torus (SRT) is constructed by adding multi-grained hierarchical by-pass links on a ring network. This paper proposes two types of improved SRT networks that have additional by-pass links to improve network performance. Routing algorithms for the improved SRTs are given by expanding a routing algorithm for the conventional SRT. Network diameters are also discussed based on the proposed routing algorithms. Furthermore network performances of the proposed SRTs are examined and it is shown that these SRTs much reduce diameter at large number of nodes.

1. ま え が き

単純なトラス結合を階層的に組み合わせて構成される相互結合網は、数万以上のプロセッシング要素を結合する超並列計算機用の相互結合網として大きく期待され、さまざまな研究がなされている^{1),2)}。SRT網^{3),4)}は、このような階層的相互結合網の1つであり、トラス結合網を基に、ノード間距離の異なるバイパスリンクを再帰的に付加して構成される結合網である。1次元での定義をもとに2次元への拡張が容易であり、また階層構造を持つため拡張性が高く、リンク回数に対して高いネットワーク性能を有している。

1次元SRT網は、網内のほとんどのノードが4つのリンクを持つのに対し、構成上2本または3本しかリンクを持たないノードが2ノードずつ存在する。そ

こで、これらのリンク数が少ないノードに付加的なリンクを設けることにより、1次元SRTの構造を均質にでき、網の直径を小さくすることができる。

本論文では、1次元SRTにリンクを付加することにより、均質でネットワーク性能を高めた拡張型1D-SRTを提案する。2章では1次元SRT網を簡単に紹介する。3章でSRTを拡張し、2種類の派生型SRT網を定める。再帰ルーティングを拡張した派生型SRTのためのルーティング手法を提案し、直径について考察する。4章でこれらのSRT網の静的ネットワーク性能を議論する。5章はまとめである。

2. 基本型1D-SRT

2.1 基本型1次元SRTの構成

本節では、基本型1次元SRT網の定義、直径、およびルーティングアルゴリズムを紹介する⁴⁾。基本型1次元SRT(1D-SRT)網は環状網を基に構成される。通信性能向上のために遠隔ノードと直接接続するバイパスリンクを、各ノードの次数が一定となるように環状網に重ね合わせる。基本型1D-SRTは次のように定義できる。

[†] 北陸先端科学技術大学院大学情報科学センター、科学技術振興事業団、さきがけ研究21

Center for Information Science, JAIST, "Information and Systems", PRESTO, JST

^{††} 北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科
School of Information Science, JAIST

定義 1 (基本型 1D-SRT) $N = 2^n$ ノードからなる環状網で、ノード番号 x_l が次の式を満たすノードをレベル l のノードと呼ぶ。

$$(x_l - 2^{l-1}) \bmod 2^l = 0 \quad (1 \leq l \leq l_{max}) \quad (1)$$

レベル l のノード x_l は、次の 4 つのノードと接続される。

$$(x_l \pm 1) \bmod N, (x_l \pm 2^l) \bmod N \quad (2)$$

以上の手続きをレベル 1 から $l_{max} - 1$ まで繰り返す。 l_{max} は、1D-SRT の最大のレベルであり、 $l_{max} = \log_2 N = n$ である。この手順によって構成される 1D-SRT を基本型 1D-SRT と呼ぶ。□

レベル l のノード群を V_l とし、 $l \geq 1$ のレベルを上位レベルと呼ぶ。基本型 1D-SRT のどのノードも、基本トラス (レベル 0) を構成する 2 本と、上位リンクを構成する 2 本の合計 4 本のリンクを持つことが分かる。ただし、ノード 0, $N/2$ は、1 以上のレベルを持たず、レベルは 0 とする。

2.2 基本型 1D-SRT のルーティングと直径

本節では、基本型 1D-SRT の拡張に必要なアルゴリズムと、直径導出について、簡単に紹介する。詳細については、文献 4) を参照されたい。

再帰ルーティングは、発信ノードと受信ノード間のレベル l_r -リンクをバイパスリンクとして使用し、バイパスリンクの終端と発信ノード、もう一方の終端と受信ノード間でルーティングを再帰的に繰り返す。ルーティングの発信ノードを x_s 、受信ノードを x_d とすると、ルーティングは次の手順で行われる。

- (1) 最初に、使用するバイパスリンクのレベル l_r を式 (5) に基づいて計算する。
- (2) この上位レベル l_r のノードのうち x_s, x_d に最近隣のノード x_s^r, x_d^r を探す。最近隣ノードは次の関数によって与えられる。

$$nlnear_f(x, l) = \left\lfloor \frac{x - 2^{l-1}}{2^l} \right\rfloor \cdot 2^l + 2^{l-1}$$

$$nlnear_b(x, l) = \left\lceil \frac{x - 2^{l-1}}{2^l} \right\rceil \cdot 2^l + 2^{l-1}$$

- (3) 同様の手続きを、今度は発信ノード x_s と x_s^r 間、 x_d^r と受信ノード x_d 間に適用し、経路を求める。

このように再帰的にルーティングアルゴリズムを適用することによって、経路が通過するノードのリストが得られる。

再帰ルーティングを用いた基本型 1D-SRT の直径は、

$$D(N) \equiv d_0(\log_2 N) \quad (3)$$

ただし

$$d_0(l) = 2^{c_f-2} (2(c_f - 1) + s_f) + 1 \quad (4)$$

$$c_f = \left\lfloor \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{8l+1} - 1 \right\} \right\rfloor \quad (5)$$

$$s_f = l - \frac{1}{2} c_f (c_f + 1) \quad (0 \leq s_f < c_f) \quad (6)$$

であり、このとき経路はレベル $(l - c)$ のリンクを通過する。再帰ルーティングを用いた直径は網の理論直径に等しく、基本型 1D-SRT の直径のオーダーは、 $\mathcal{O} \left(2^{\sqrt{2 \log_2 N}} \sqrt{\log_2 N} \right)$ である⁴⁾。

3. 1D-SRT の拡張

3.1 LongSpan 型 1D-SRT

SRT の結合数の少ないノードに新たなリンクを追加することにより、通信性能を改良した派生型 SRT を提案する。

基本型 1D-SRT のノード 0 および $N/2$ はリンクを 2 本、ノード $\frac{1}{4}N$ および $\frac{3}{4}N$ はリンクを 3 本しか持たない。そこで、ノード 0 と $\frac{1}{2}N$ 間に上位リンクを割り当て、直径を短縮することを目的とした、LongSpan 型の 1 次元 SRT (LS-1D-SRT) を定義する。

定義 2 (Long Span 型 1D-SRT) $N = 2^n$ ノードからなる基本トラスから、ノード番号が

$$(x_l - 2^{l-1}) \bmod \min(2^l, 2^T) = 0 \quad (7) \\ (1 \leq l \leq l_{max} - 1)$$

を満たすノード群 x_l を取り出し、環状に接続する。この手続きをレベル l が 1 から $l_{max} - 1$ まで繰り返す。ここで $T = n - 2$ 。LongSpan 型 1D-SRT の最大のレベル l_{max} は、 $l_{max} = \log_2 N - 1 = n - 1$ である。□

図 1 に 32 ノードからなる LS-1D-SRT を示す。LS-1D-SRT は、ノード 0, $\frac{1}{2}N$ 付近の長距離通信能力の向上が期待できる。

3.2 ShortSpan 型 SRT

基本型 1D-SRT では、ほとんどのノードが 4 つのリンクを持つのに対し、ノード 0 および $N/2$ はリンクを 2 本、ノード $\frac{1}{4}N$ および $\frac{3}{4}N$ はリンクを 3 本しか持たない。そこで、ノード 0, $\frac{1}{4}N$, $\frac{1}{2}N$, $\frac{3}{4}N$ に、レベル $l_{max} - 2$ の上位リンクを割り当てた、ShortSpan 型の 1 次元 SRT (SS-1D-SRT) を定義する。

定義 3 (Short Span 型 1D-SRT) $N = 2^n$ ノードからなる基本トラスから、ノード番号が

$$(x_l - 2^{l-1}) \bmod \min(2^l, 2^T) = 0 \quad (8) \\ (1 \leq l \leq l_{max} - 2)$$

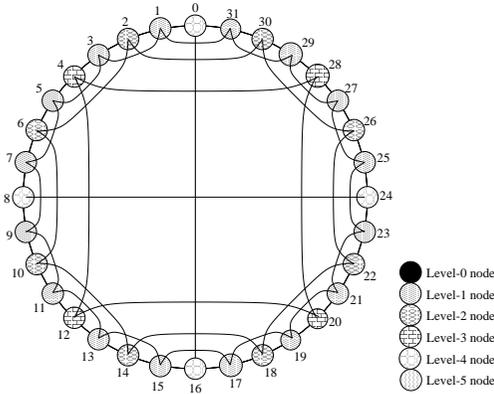


図1 32ノードからなる Long Span 型 1D-SRT
Fig.1 Long Span 1D-SRT consist of 32 nodes.

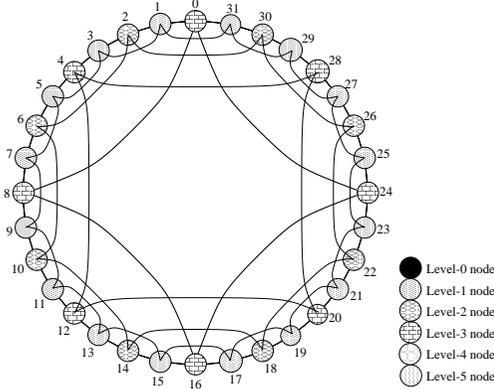


図2 32ノードからなる Short Span 型 1D-SRT
Fig.2 Short Span 1D-SRT consist of 32 nodes.

を満たすノード群 x_l を取り出し、環状に接続する。この手続きをレベル l が 1 から $l_{max} - 2$ まで繰り返す。ここで $T = n - 3$ 。ShortSpan 型 1D-SRT の最大のレベルは、 $l_{max} = \log_2 N - 2 = n - 2$ である。□

図2に32ノードからなるSS-1D-SRTを示す。SS-1D-SRTは、結合数の最大が4という条件での、網内の総リンク数が最大となるので、総合的な通信能力の向上が期待できる。

ここで、基本型、Long Span 型、Short Span 型の1D-SRTの、定義の違いを表1にまとめる。

3.3 拡張再帰ルーティング

LS-1D-SRT, SS-1D-SRT のルーティングは、基本型 1D-SRT の最近隣ノードの探索ルーチン ($nlnear_f, nlnear_b$) を変更して得られる。なぜなら、基本型 1D-SRT と LS/SS-1D-SRT との差異は、ノード $0, \frac{1}{4}N, \frac{1}{2}N, \frac{3}{4}N$ に対するレベル割当てだけであり、 $nlnear_f, nlnear_b$ は、ノードレベルを引数としてノード番号を返す関数だからである。また、他の

表1 1D-SRTの種類
Table 1 Type of 1D-SRT

Type of 1D-SRT	T	l_{max}
BSC-1D-SRT	n	n
LS-1D-SRT	$n - 2$	$n - 1$
SS-1D-SRT	$n - 3$	$n - 2$

サブルーチンは、ノードレベルとノード番号が直接関係しないので、変更せずに利用できる。

そこで、基本型 1D-SRT の再帰ルーティングアルゴリズムの $nlnear_f, nlnear_b$ を次のように変更して適用する。

$$nlnear_f(x, l) = \left\lfloor \frac{x - 2^{l-1}}{\min(2^l, 2^T)} \right\rfloor \cdot 2^l + 2^{l-1} \quad (9)$$

$$nlnear_b(x, l) = \left\lfloor \frac{x - 2^{l-1}}{\min(2^l, 2^T)} \right\rfloor \cdot 2^l + 2^{l-1} \quad (10)$$

ここで、基本型 1D-SRT は $T = n$ 、LS-1D-SRT は $T = n - 2$ 、SS-1D-SRT では $T = n - 3$ となる。他のサブルーチンは、基本型 1D-SRT と同一である。

3.4 直径

3.4.1 Long Span 型 1D-SRT の直径

$N = 2^n$ ノードからなる基本型 1D-SRT の直径は $d_0(n)$ であった。最初に、LS-1D-SRT の直径について考える。LS-1D-SRT の再帰ルーティングアルゴリズムを用いると、LS-1D-SRT の場合は $d_0(n - 1)$ となる。なぜなら、ある上位レベル k のノード x_k から見た下位レベルのノード群 x_l の相対距離は、どのレベル k のノードから見ても同一であるため、LS-1D-SRT のノードの中で、最も離れたノード間は $0, \frac{1}{4}N$ 間となるからである。したがって、 $N = 2^n$ ノードからなるLS-1D-SRT の直径を $D^{LS}(N)$ と置くと、

$$D^{LS}(N) \equiv d_0(n - 1) = d_0(\log_2 N - 1). \quad (11)$$

となる。

3.4.2 Short Span 型 1D-SRT の直径

SS-1D-SRT の場合、 $N = 2^n$ ノードからなるSS-1D-SRT の直径を $D^{SS}(n)$ と置くと、

$$d_0(n - 2) < D^{SS}(n) \leq d_0(n - 1) + 1 \quad (12)$$

となる。左辺について、LS-1D-SRT と同様の議論により、最も離れたノード間が $0, \frac{1}{8}N$ 間となるので、 $d_0(n - 2)$ よりは大きい。右辺について、LS-1D-SRT と同様に、 $0, \frac{1}{2}N$ 間、 $\frac{1}{4}N, \frac{3}{4}N$ 間はバイパスリンクを用いて短い距離で結合できるが、この間がLS-1D-SRT は1ホップなのに対し、SS-1D-SRT は2ホップ要するので、 $(D^{LS}(N) + 1)$ 以下の直径となる。

4. 1D-SRT のネットワーク性能

表2に、基本型 1D-SRT (BSC-1D-SRT), Long-

表2 1次元 SRT の平均距離
Table 2 Average distance of 1D-SRT.

Network	Number of Nodes		
	2^8	2^{10}	2^{12}
BSC-1D-SRT	7.03	11.46	17.72
LS-1D-SRT	6.91	11.34	17.62
SS-1D-SRT	6.79	11.23	17.50

表3 1次元 SRT および他の1次元結合網の直径(次数)の比較
Table 3 Diameter (Degree) of 1D-SRTs and other 1D-networks.

# of node	2^4	2^8	2^{12}	2^{16}
BSC-1D-SRT	5 (3.65)	17 (3.98)	41 (4.00)	81 (4.00)
LS-1D-SRT	3 (3.88)	13 (3.99)	33 (4.00)	65 (4.00)
SS-1D-SRT	4 (4.00)	12 (4.00)	30 (4.00)	65 (4.00)
Ring Net	8 (2)	128 (2)	4096 (2)	64k (2)
Chordal Ring	3 (3)	15 (3)	63 (3)	255 (3)
Barrel Shifter	2 (7)	4 (15)	6 (23)	8 (31)
RDT (2,4,1)/ α	-	-	8 (8)	12 (8)

Span型およびShortSpan型SRTの平均距離を示す。ノード数が少ない場合($N = 2^8$)にはShortSpan型にすることにより平均距離が3.4%ほど短縮できるが、ノード数が多くなると($N = 2^{12}$)3方式の差は縮まりほとんど差がなくなる(1.4%)。これは、基本型1D-SRTとLS-/SS-1D-SRTの差異が、LS-SRTの場合ノード0, $\frac{1}{2}N$ の2つ、またSS-1D-SRTの場合はノード0, $\frac{1}{4}N$, $\frac{1}{2}N$, $\frac{3}{4}N$ の4つだけであるので、網全体のノード数が多くなると、バイパスリンクによる距離の短縮の貢献が少なくなるためである。平均距離は、つねに $BSC-1D-SRT > LS-1D-SRT > SS-1D-SRT$ である。

表3に1D-SRTどうしの直径と次数の比較、および他の1次元結合網との比較を示す。次数は、全結合数をノード数で割った平均値である。LongSpan型、ShortSpan型の直径は、バイパスのリンクを設けることにより、基本型に対しておよそ3/4に小さくすることができ、この直径の短縮はノード数が大きい場合に顕著である。これに比べて、LongSpan型とShortSpan型の差はそれほど大きくない。

他の1次元結合網や階層型結合網と比べると、Chordal Ringは、次数が小さくノード数が少ないとき($N = 2^4$)は、どのタイプの1D-SRTよりも直径が小さい反面、ノード数が多くなってくると、急速に直径が増大する。Barrel Shifterはノード数が多い場合でも直径が非常に小さいが、次数が $O(\log_2 N)$ で

あり、ノード数が大きくなるとノードの次数が非常に大きくなり、実装性が低下する。RDT(2,4,1)/ α は、小さい直径を持つが、2次元網であり、次数が2倍である。1D-SRTは次数がChordal Ringとあまり変わらないにもかかわらず、ノード数が増加しても直径が急激に増加しない。1D-SRTは、階層構造により次数や網の構成を変化させることなくノード数を増加できるので、スケーラビリティに優れているといえる。

5. まとめ

本論文は、構造が単純な1次元の基本型SRT網を拡張し、2種類の派生型SRT網を定めた。基本型SRTでリンク本数が少ないノードに付加的なバイパスリンクを設け、バイパスリンクの本数によって、LongSpan SRT, ShortSpan SRTの2つの派生型SRTを定義した。それぞれのSRTについて、基本型SRTの再帰ルーティングを拡張したルーティング手法を示し、直径について議論した。網の平均距離を評価したところ、ノード数が少ない場合、派生型SRTは数%平均距離を短縮できることが分かった。また、派生型SRTの直径は、基本型SRTの直径のおよそ3/4倍に短縮できた。

今後の課題として、派生型SRTの多次元への拡張、および多次元SRTでの適応型ルーティング手法の検討を行う予定である。

謝辞 本研究の一部は科学研究費補助金を用いて行われた。関係各位に感謝する。

参考文献

- 1) 楊 愚魯, 天野英晴, 柴村英智, 末吉敏則: 超並列計算機向き結合網: RDT, 信学論, Vol. J78-D-I, No.2, pp.118-128 (1995).
- 2) Lin, C.-C. and Prasanna, V.K.: A Routing Algorithm for PEC Networks, *Proc. Fourth Symposium on the Frontiers of Massively Parallel Computation*, pp.170-177 (1992).
- 3) 井口 寧, 堀口 進: 超並列計算機向きプロセッサ結合網 SRT, 信学技報, Vol.95, No.327, CPSY95-69, pp.25-30 (1995).
- 4) 川井雅之, 井口 寧, 堀口 進: 超並列計算機向き相互結合網 SRT のデッドロックフリールーティング, 情報処理学会論文誌, Vol.40, No.5, pp.1977-1984 (1999).

(平成 15 年 1 月 6 日受付)

(平成 15 年 4 月 3 日採録)