

4ZB-5 焼結作用を考慮した雪の踏み散らしシミュレーション

高橋 哲也 藤代 一成
慶應義塾大学 理工学部 情報工学科

1 背景と目的

焼結 (sintering) は、固体粉末が融解により相互に結合し、固く焼き締まる現象である。焼結は現実世界のさまざまな場面で確認されており、特に金属粉末を冶金する場合に用いられることが多い。

本研究では、雪における焼結に焦点をあてる。従来の雪の CG 表現では、焼結作用を考慮していないため、雪を踏みしめた際に靴や足などへの付着が表現されていないものが多い。雪は映像に大きな影響を与えるため、このような物象を無視することは、作品全体の質に悪影響を与えかねない。

そこで、雪と物体をそれぞれ粒子の集合体として扱い、相互作用をモデリングする。特に温度による粘着性の変化、粒子の熱伝導、対流による熱の伝導を考慮することで、焼結による雪の付着をより物理的に忠実に再現する。

2 モデリング手法

雪は流体であると仮定し、SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法を用いてその振舞いを近似する。ただし、雪は水などの振舞いとは異なり、非ニュートン流体として扱う。相互作用をとる物体は剛体であると仮定する。流体、剛体をともに粒子の集合体として近似することにより、双方を統一的に計算することが可能になる。

2.1 SPH 法

3次元空間における流体の支配方程式は、連続方程式と運動量保存則から構成される：

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f}^{\text{pressure}} + \mathbf{f}^{\text{gravity}} + \mathbf{f}^{\text{viscosity}} + \mathbf{f}^{\text{coupling}} + \mathbf{f}^{\text{sintering}} \quad (2)$$

式 (2) は、ナビエ・ストークス方程式とよばれる。ここで、 ρ は粒子の密度、 \mathbf{v} は速度ベクトルである。

SPH 法における任意の座標 \mathbf{r} における物理量 $\phi(\mathbf{r})$ は、粒子 j のもつ物理量 ϕ_j を用いて以下のように計算される：

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_j \phi_j \frac{m_j}{\rho_j} W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h)$$

ここで、 m_j, ρ_j は粒子 j の質量、密度である。 $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h)$ はカーネルとよばれ、 \mathbf{r} から遠ざかるほど減少し、影響半径 h を超えるとき 0 になる。

圧力項 $\mathbf{f}^{\text{pressure}}$ および重力項 $\mathbf{f}^{\text{gravity}}$ に関しては Müller ら [1] と同様に計算を行う。

2.2 非ニュートン流体

一般的なナビエ・ストークス方程式は、ニュートン流体と仮定して導出されている。しかし、雪は非ニュートン流体として振舞うため、粘性項に関して別に考える必要がある。そこで、我々は Herschel-Bulkley モデル [2] を用いて粘性項を定義する：

$$\mathbf{f}_i^{\text{viscosity}} = \sum_j \frac{\tau_i + \tau_j}{2} \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h) \quad (3)$$

$$\tau_i = \begin{cases} (\mu |\mathbf{S}|^{n-1} + \frac{\tau_0}{|\mathbf{S}|}) \mathbf{S} & (|\tau_i| > \tau_0) \\ 0 & (|\tau_i| \leq \tau_0) \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{S} = \frac{(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)}{2} \quad (5)$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{v} \otimes \nabla \mathbf{x} \quad (6)$$

ここで、 τ_i, τ_j は粒子 i, j のせん断応力テンソル、 μ は粘性係数、 \mathbf{S} は変形速度テンソル、 τ_0 は降伏応力、 \mathbf{v} は相対速度ベクトル、 \mathbf{x} は相対位置ベクトルである。なお、定数 n は変形速度テンソルの影響度を決定する。

2.3 流体と剛体の連成

流体粒子と剛体粒子は統一的に扱えるが、相互作用の計算に SPH 法を用いると、剛体から流体へ伝わる力が減衰してしまう。そこで、剛体から流体への力を別に加えることにより、減衰することなく力を伝える：

$$\mathbf{f}_i^{\text{coupling}} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_u + \mathbf{f}_d \quad (7)$$

ここで、 \mathbf{f}_n は反発力、 \mathbf{f}_u は摩擦力、 \mathbf{f}_d は減衰力である。それぞれの力は Bell ら [3] と同様に計算を行う。

2.4 焼結作用

一般的な SPH 法では、物体表面に沿った流れや付着を表現することができない。Clavet [4] らは粘着力を考慮し、物体表面に沿った流れを表現したが、力が加わると流れてしまう。そこで、我々は以下の式を定義し、焼結による着雪を再現する：

$$\mathbf{f}_i^{\text{sintering}} = \sum_j \frac{q_i + q_j}{2} \frac{m_j}{\rho_j} T_j b_{ij} W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h) \quad (8)$$

ここで、 q_i, q_j は粒子 i, j の焼結係数、 T_j は粒子 j の温度、 b_{ij} はめり込み量である。

2.5 熱伝導と対流

焼結項 $\mathbf{f}^{\text{sintering}}$ は粒子の温度に依存して変化するため、粒子温度を計算する必要がある。また、雪と物体が接触する際に、力の影響を及ぼしあうだけでなく、熱の伝導が起こる。本研究では、以下の式により熱伝導を計算する：

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \sum_j \frac{k_i + k_j}{2} \frac{m_j}{\rho_j} (T_j - T_i) \nabla^2 W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, l) \quad (9)$$

ここで、 k_i, k_j は粒子 i, j の熱伝導係数である。

また、外気に触れている表面粒子は対流により影響を受けるため、次式によりその影響を計算する：

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = c A o (T_e - T_i) \quad (10)$$

ここで、 c は対流係数、 A は粒子面積、 o は外気接触率、 T_e は外気温度である。

2.6 シミュレーションループ

シミュレーションループは以下のとおりである。

1. 各粒子の密度を計算する；
2. 式 (9)、式 (10) により温度、式 (4)、式 (5)、式 (6) によりせん断応力テンソルを計算する；
3. 式 (3)、式 (7)、式 (8) によりそれぞれの力を計算し、式 (1)、式 (2) により速度、位置を更新する。

3 実験結果

開発環境として、CPU: Core i7 860 2.80GHz, RAM: 6.00GB の PC を用いた。プログラミング言語は C++, 描画 API は OpenGL 4.1 である。レンダリングには POV-Ray3.62 を用いた。雪と物体はポリゴン表現をボクセル化し、その位置に粒子を配置することで初期位置を決定した。なお、本節に示すシミュレーション速度 (単位:fps) には POV-Ray でのレンダリング時間を含めていない。

3.1 熱伝導

低温の雪の上に高温物体を落下させた場合に生じる熱伝導の様子を可視化した。外気の影響も考慮しており、外気の温度は初期の高温物体の温度と同一である。

図 1 から、熱が伝わっている様子が確認できる。また、表面付近は対流により外気の影響を受けていることもわかる。

雪、物体はともに直方体領域を初期粒子位置とした。雪の粒子数は 2,048 個、物体の粒子数は 256 個であり、シミュレーション速度は 92fps である。

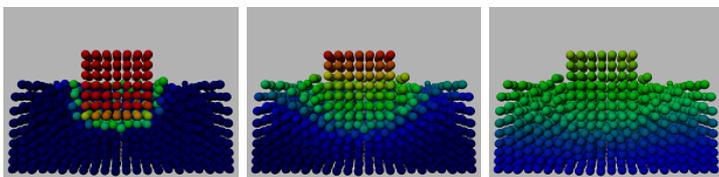


図 1: 低温の雪に対して高温物体を落下させた場合に、熱伝導が生じている様子。低温が青、中間が緑、高温が赤であり、それらの間は区分線形補間する。

3.2 焼結作用による着雪

図 2 は、雪に靴を踏み付けさせた後、持ち上げたものである。焼結による雪の付着や付着した雪が分離し、散らばっている様子が確認できる。

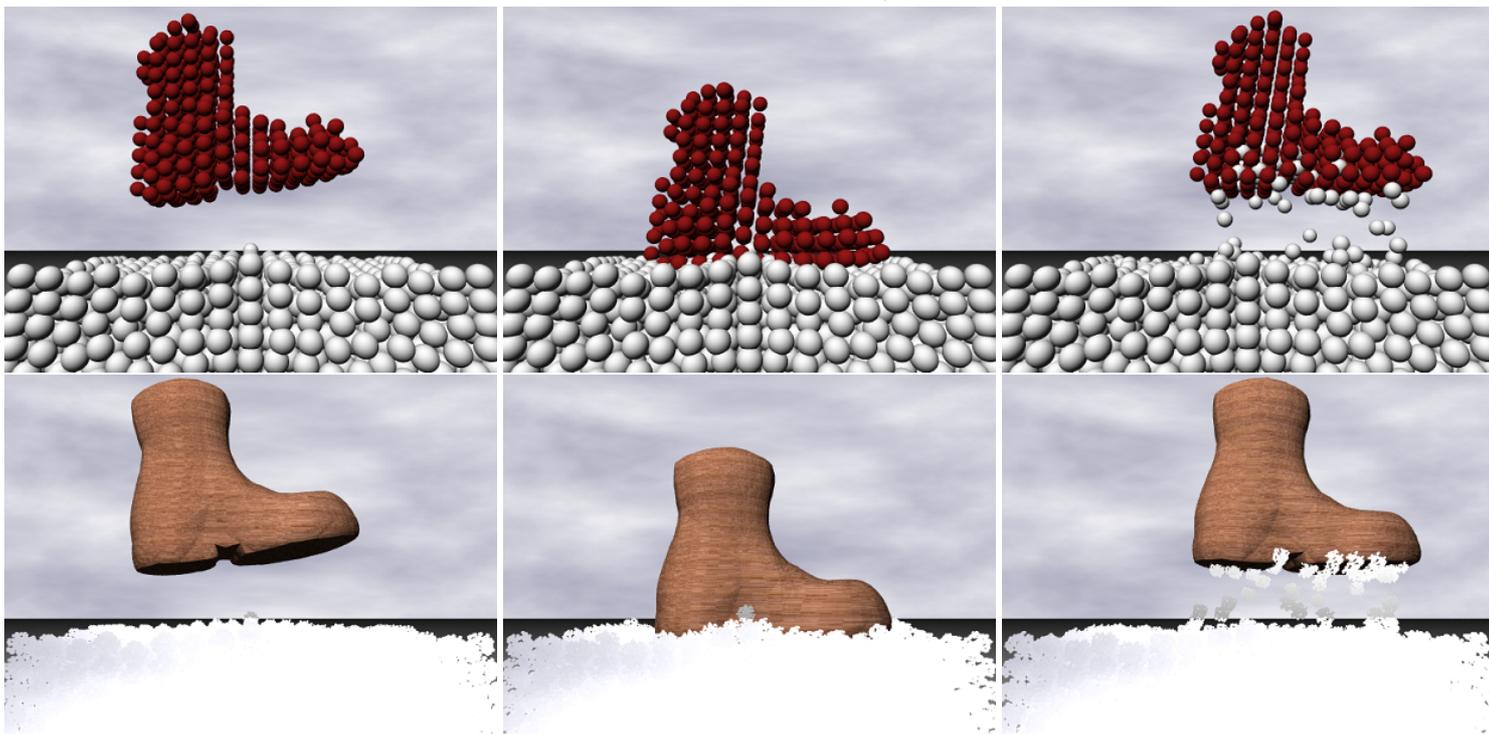


図 2: 雪に靴を落下させた後、持ち上げたときの様子である。左端から、初期配置→雪と靴の衝突→持ち上げ後となっている。上段はシミュレーション用粒子を表示したものであり、下段はアニメーション用にレンダリングしたものである。

現実の歩行に似せるため、靴の初期速度、回転方向などを与えている。靴の持ち上げに関しても同様にパラメタ指定により実現した。

雪はハイトフィールドより下の部分、靴は 3D ポリゴン内の領域を初期粒子位置とした。雪の粒子数は 4,096 個、靴の粒子数は 287 個であり、シミュレーション速度は 44fps である。

4 結論と今後の課題

本研究では、粒子法の一つである SPH 法をベースとして、雪と物体の相互作用を再現した。焼結に関係する諸量を評価することによって、靴に付着する雪や踏み散らされる雪が表現できた。

今後の課題としては、圧力融解による相転移、関節体モデルを用いた人体との相互作用、GPU によるシミュレーションおよびレンダリングの高速化などが挙げられる。

謝辞

本研究の一部は、科学研究費補助金基盤研究 (B)20300033 の支援により実施された。

参考文献

- [1] Müller, M., Charypar, D., and Gross, M.: "Particle-Based Fluid Simulation for Interactive Applications," in *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pp. 154-159, 2003.
- [2] Herschel, W. H. and Bulkley, R.: *Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen*, Springer Berlin / Heidelberg, 2002.
- [3] Bell, N., Yu, Y., and Mucha, P. J.: "Particle-Based Simulation of Granular Materials," in *Proceedings of the 2005 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pp. 77-86, 2005.
- [4] Clavet, S., Beaudoin, P., and Poulin, P.: "Particle-Based Viscoelastic Fluid Simulation," in *Proceedings of the 2005 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pp. 219-228, 2005.