1K-4

2連結平面グラフのst-orientationの列挙

Andry Setiawan[*]
群馬大学工学研究科[†]

中野　眞一[‡]
群馬大学工学研究科[§]

平成22年10月28日

1　研究背景

指定された条件を満たすものを全て求める問題は列挙問題と呼ばれる．列挙問題は様々な分野に応用がある．

グラフ G の $st-$orientation とは，ある条件を満たすように G の各辺に方向を付けたものであり，様々なアルゴリズム中で用いられる．2連結グラフは任意の2点 s,t について $st-$orientation を持つことが知られている．

本研究では，2連結平面グラフ G と G の外周の2点 s と t が与えられたときに，G のst-orientationを全て生成するアルゴリズムを提案する．

2　定義

グラフ $G=(V,E)$ は，**点**の集合 V と2点を結ぶ**辺**の集合 E により構成される．2点 u と v を結ぶ辺 $e=(u,v)$ があるとき，u と v をそれぞれ e の**端点**といい，e は u と v に**接続**するといい，u と v は**隣接**しているという．辺の交差のないように平面に描かれたグラフを**平面グラフ**という．各 $i,(0 \le i < k)$，について，$(v_i,v_{i+1}) \in E$ である点の列 $p=(v_0,v_1,...,v_k)$ を v_0v_k **パス**という．グラフ G の任意の2点間にパスが存在するとき，グラフは**連結**であるという．グラフ G の各点 v について，v と v に接続する全ての辺を削除しても非連結にならないとき，G は**2連結**であるという．

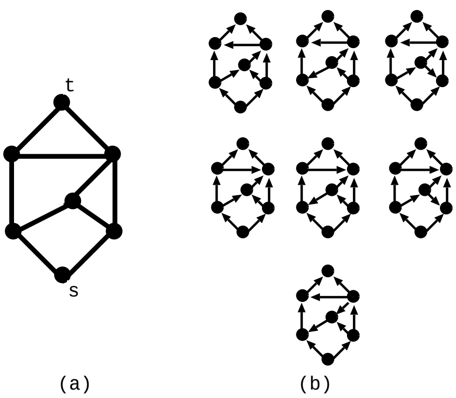

図 1: (a) グラフ G と (b)G の st-orientation.

平面グラフは，平面を**面**と呼ばれる連結な領域に分割する．唯一の非有界な面を**外面**と呼び，他の面を**内面**と呼ぶ．面の境界上の点と辺からなる時計回りの列を面の**輪郭**とする．平面グラフGの外面の輪郭を**外周**と呼ぶ．

辺 e の**削除**とは，e をグラフから取り除くことであり，辺 e の**縮約**とは，e を削除し，さらに e の両端点を同一点とみなすことである．ただしこの際多重辺 (同じ2点を結ぶ2本以上の辺) が生じたときは，任意の1本を削除する．(よって，自己ループは生じない．) グラフ G から辺 f を削除したグラフを $G\backslash f$ と表し，グラフ G から辺 f を縮約したグラフを G/f と表す．

平面グラフ G と，G の外周の2点 s と t が与えられたとき，次の条件を満たすように G の各辺に方向を付けたものを G の **st-orientation** と呼ぶ．

1. 点 s は，出ていく向きの辺のみを持つ．
2. 点 t は，入ってくる向きの辺のみを持つ．
3. s と t 以外の点は，少なくとも1本の出ていく向きの辺と，少なくとも1本の入ってくる向きの辺を持つ．
4. 有向サイクルを持たない．

G に辺 $e=(s,t)$ が存在しないとき，そのような辺を外面に追加する．G に辺 (s,t) を追加したものの各 $st-$orientation から G の $st-$orientation が容易に得られるので，このように仮定しても一般性を失わない．本文では各辺が上向きとなるように常に G の $st-$orientation を描く．また，e は最右にあるように描く．

G の st-orientation D の各面 F の輪郭は，共通の始点と共通の終点を持つ2つの有向パスから構成される [B99, Lemma 4.1]．よって，外周は共通の始点 s と共通の終点 t を持つ2つの有向パスから構成される．このうち，左側に位置するパスを**最左 st パス LMP(D)** と呼ぶ．右側に位置するパスはちょうど1本の辺 (s,t) からなる．

D から辺 $e \ne (s,t)$ を削除したとき，$G\backslash e$ の st-orientation が得られるならば，e は**削除可能**であるという．D から辺 e を縮約したとき，G/e の st-orientation が得られるならば，e は**縮約可能**であるという．ただし，縮約の際して多重辺が生じたときは"より左"の辺を削除することにする．D の (s,t) 以外の各辺は，削除可能，もしくは，縮約可能であることが知られている [F95, Prop. 6.1]．

3　主なアイデア

本研究の主なアイデアを説明する．

$O(G)$ は G の st-orientation の集合とする．外周上 (時計回り) で s の次の点を x とする．辺 $f=(s,x)$ とする．辺 f を輪郭上に持つ内面を F_c とする．F_c の輪郭上で x の次の点を y とする．図2参照．

次の補題は [F95, Lemma 8.1] から容易に得られる．

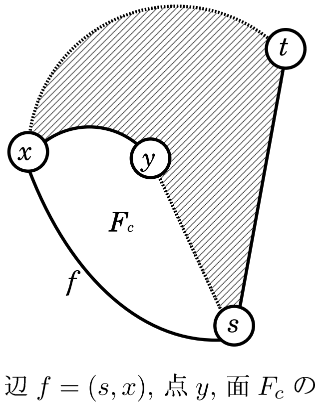

図 2: 辺 $f=(s,x)$, 点 y, 面 F_c の例図.

補題 1　外周上に2辺 (s,t) とf=(s,x)を持つ2連結平面グラフ G が与えられたとき，次の式が成立する．

$$|O(G)| = |O(G\backslash f)| + |O(G/f)|$$

[*]Andry Setiawan
[†]Department of Computer Science, Gunma University
[‡]Shin-ichi Nakano
[§]Department of Computer Science, Gunma University

証明　各 $D' \in O(G\backslash f)$ に対応する $D \in O(G)$ が次のように構成できる．(1)D' に辺 (s,x) を追加する．(2) 辺 (s,x) に s から x への方向をつける. 同様に, 各 $D'' \in O(G/f)$ に対応する $D \in O(G)$ が構成できる. 図 3 を参照.

また, これらは互いに異なる．なぜならば, $D' \in O(G\backslash f)$ から構成された st-orientation D の辺 (x,y) は y から x に方向づけられ, $D'' \in (G/f)$ から構成された st-orientation D の辺 (x,y) は x から y に方向づけられるので, 重複は存在しない.

よって $O(G\backslash f)$ と $O(G/f)$ を列挙すれば, $O(G)$ も列挙したことになる.　(証明終)

補題 1 より $st-$orientation を列挙する再帰的なアルゴリズムを設計できる.

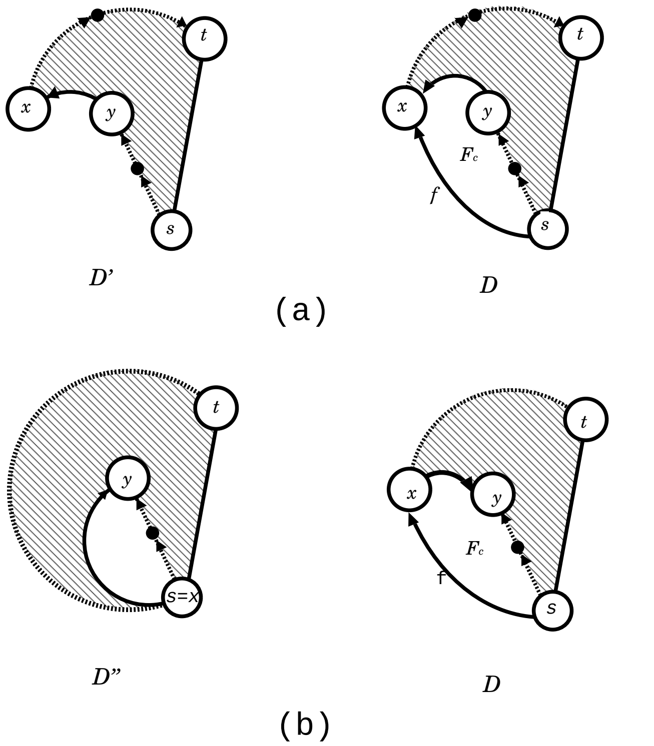

図 3: 補題 1 の例図. (a)$D' \in O(G\backslash f)$ から st-orientation D の構成. (b)$D'' \in (G/f)$ から st-orientation D の構成.

4　効率化

グラフ G が $st-$orientation を持つ必要十分条件は G が 2 連結であることである [F95, Lemma 4.1]. よって $G\backslash f$ や G/f が 2 連結でないならば, $O(G\backslash f) = \phi$, $O(G/f) = \phi$ となる. つまり, st-orientation は存在しない.

そこで, 無駄な $G\backslash f$ や G/f の構成を省くための手法を紹介する.

各内面 F の輪郭と $LMP(D)$ の, 共通な極大部分パスの集合を $C(F)$ とする. $|C(F)| = k$ のとき F は *k-left touch face* という. $k > 1$ なる k-left touch face を *span face* という.

外周上で s の次の点を x とする. 辺 (s,x) を輪郭上に持つ内面を F_c とする.

補題 2　辺 $f = (s,x)$ が削除不可能であるのは面 F_c が *span face* である, もしくは, x に接続する辺がちょうど 2 本のときであり, その時に限る.

証明　x に隣接する辺が 2 本のとき, これを (s,x), (x,z) とする. $G\backslash(s,x)$ はカット点 z をもつので 2 連結ではない. すなわち, $G\backslash(s,x)$ は $st-$orientation を持たない.

同様に面 F が span face ならば, $G\backslash(s,x)$ はカット点をもち 2 連結ではない. すなわち, $G\backslash(s,x)$ は $st-$orientation を持たない.

この 2 つの場合以外は $G\backslash(s,x)$ は 2 連結であることが背理法で簡単に示せる.　(証明終)

補題 3　辺 $f = (s,x)$ が縮約不可能であるのは, 輪郭に点 s と x は含むが, 辺 (s,x) を含まない *span face F* が存在するときであり, そのときに限る.

証明　輪郭に点 s と x は含むが辺 (s,x) を含まない span face F が存在するとき, $G/(s,x)$ はカット点 s をもつので 2 連結ではない. すなわち, $G/(s,x)$ は $st-$orientation を持たない.

また, $G/(s,x)$ が 2 連結でなくなるのは上の場合だけであることが背理法で簡単に示せる.　(証明終)

補題 2 と 3 によりアルゴリズムから無駄な $G\backslash f$ や G/f の構成を省くことができる.

この判定を高速におこなうために次のデータ構造を用意する.

G を隣接リストとして格納する. すまわち, 各点に接続する辺を点のまわりに時計回りに現れる順にリストでつなぐ. 各辺 (u,v) は点 u と点 v の隣接リストに現れるが, これら 2 つを双方向ポインタでつなぐ. これにより面の輪郭を辿ることができる. これは平面グラフの標準的なデータ構造である.

さらに, 外周上の各点 $v \in V$ に, v を輪郭に持つ span face をリスト $SF[v]$ に, v のまわりに現れる順に格納する. さらに, 各内面 F に $C(F)$ を, リストとして格納する. これらにより補題 2 と 3 の判定を高速におこなうことができる.

G から $G\backslash f$ や G/f を構成するとき, これらのデータ構造を次のように更新する.

G から $G\backslash f$ を構成するとき, 新しい外点が現れる. これらの新しい各外点 v について, v を輪郭に持つ各内面 F の $C(F)$ を更新し, また, $SF[v]$ を更新する.

もし G の内面 F で次の (1)〜(3) を満たすものがあるときは, $G\backslash f$ において F は span face でなくなる. (1) F_c に隣接し, (2) $C(F)$ に点 s と x を含む極大部分パスを含み, (3) $C(F) = 2$. この場合のみ $SF(x)$ と $SF(s)$ から F を削除する必要がある.

G から G/f を構成するとき, $SF(s)$ と $SF(x)$ をマージする.

各点が新たに外点になるのは $st-$orientation 全体の生成を通して 1 回のみであり, このときのデータ構造の更新には点の次数の総和だけの時間が必要になる. よって st-orientation の生成は 1 個あたり $O(m) = O(n)$ 時間しかかからない.

定理 1　2 連結平面グラフ G と G の外周の 2 点 s と t が与えられたとき, G の st-orientation の全てを, 1 個当たり $O(n)$ 時間で列挙できる.

5　まとめと今後の課題

2 連結平面グラフ G と G の外周の 2 点 s と t が与えられたとき, G の st-orientation の全てを高速列挙するアルゴリズムを設計した. アルゴリズムは st-orientation を一つ当たり $O(n)$ 時間で列挙する.

参考文献

[E76] S. Even, R.E. Tarjan, *Computing an st-numbering,* Theoritical Computer Science, 2, 339-344, 1976.

[B99] G.D. Battista, P. Eades, R. Tamassia and I.G. Tollis, *Graph Drawing: Algorithms for the Visualization of Graphs,* Prentice Hall, 1999.

[F95] H. Fraysseix, P.O. Mendez, P. Rosenstiehl, *Bipolar Orientations Revisited,* Discrete Applied Mathematics, 56, 157-179, 1995.