

非線形予測誤差に基づいた株式ポートフォリオの構築

猪瀬 悟史[†] 鈴木 智也^{††}[†] 茨城大学理工学研究科 ^{††} 茨城大学工学部

1 はじめに

マコービッツのポートフォリオ理論では、最近の収益率の平均値と標準偏差に基づき、将来の期待リターンとリスクを推定し、株式銘柄の組合せ比率を変化させることで、低リスク高リターンの投資を実現する [1]。この期待リターンとリスクは、いわば将来収益率の予測値と予測誤差に相当し、予測手法として考えれば、このポートフォリオ理論は単純平均という極めて単純な方法によって将来収益率の予測を行っている。しかし現実の株式市場は、非線形なダイナミクスによって駆動している可能性が高く、より高次の非線形予測モデルが効果的である。

そこで本研究では、既存のポートフォリオ理論の枠組みにそって非線形予測モデルを融合した新理論を提案する。さらに実際の日次収益率データを用いて投資シミュレーションを行い、提案手法の有効性を検証する。

2 非線形予測の必要性

まず始めに、株式収益率の予測にとって非線形予測がどれほど有効なのかを調べたい。非線形予測を行うには、前処理として観測時系列データ $x(t)$ に対して埋め込み定理 [2] を適用し、システムのふるまいとして多次元状態ベクトル $X(t)$ を再構成する必要がある。

$$X(t) = \{x(t), x(t-\tau), \dots, x(t-(d-1)\tau)\} \quad (1)$$

ここで、 τ は遅れ時間、 d は埋め込み次元を表す。次に予測対象点を $X(T)$ とすると、この近傍点 $X(T_k)$, $T_k < T$ を学習データ内から選出する。本研究では、全 T 個のうち $k[\%]$ の近傍点を用いた。この k を近傍率と呼ぶ。これらの近傍集合 $X(T_k)$ と 1 ステップ後の点集合 $X(T_k + 1)$ を利用すれば、システムの時間発展のダイナミクス F を最小二乗法により推定することができる。

$$\begin{aligned} Y &= FX \\ F &= YX^t[XX^t]^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで X と Y はそれぞれ $X(T_k)$ と $X(T_k + 1)$ によって構成された行列である。その後、推定された F を用いて予測対象点 $X(T)$ を予測する。

$$\hat{X}(T+1) = FX(T) \quad (3)$$

$\hat{X}(T+1)$ 内の成分として $\hat{x}(T+1)$ を取り出せば、1 次元時系列データ $x(T)$ に対する 1 ステップ予測値を得る。つまりこの予測法は、システムのダイナミクスを局所的に線形近似した非線形 AR モデルである。この近傍率 k を拡大すれば、線形近似の領域が局所から大域へと広がり、 $k = 100[\%]$ の時にこの予測法は完全な線形 AR モデルとなる。

図 1 に、実際の株式の日次収益率 $r(t)$ に対する予測結果を示す。この $r(t)$ を式 (1) の $x(t)$ とみなして予測を行う。図中の従来法とは、既存のポートフォリオ理論で用いられている過去の収益率の単純平均法であり、式 (1) の成分を平均化することで $\hat{x}(t+1)$ を得る。線形予測法とは、 $k = 100[\%]$

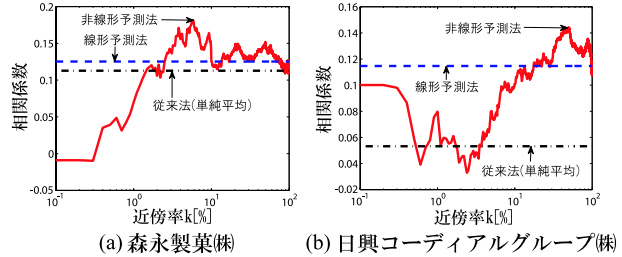


図 1: 実データに対する予測精度。学習データ長および評価データ長はそれぞれ 1250。予測値と真値の相関係数によって精度を評価した。なお、式 (1) 中の d は 5 とし、 τ は自己相関関数に基づいて 1 とした [2]。

の非線形予測法と等価である。これらの結果より、非線形モデルのほうがより良い推定精度を得られるため、収益率データは非線形性を有しており、それゆえ非線形手法が有効であるといえる。

3 ポートフォリオ理論の拡張

従来のポートフォリオ理論では、時刻 $t+1$ における銘柄 i の期待収益率 $\tilde{r}_i(t+1)$ と、リスク $\sigma_i(t+1)$ は次式により算出される。

$$\begin{aligned} \tilde{r}_i(t+1) &= \tilde{r}_i(t) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} r_i(t-k\tau) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma_i(t+1) = \sqrt{\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} (r_i(t-k\tau) - \tilde{r}_i(t))^2} \quad (5)$$

通常は $\tau = 1$ であるが、式 (1) の埋め込みと対応させるべく d と τ の表記を用いた。以後 $\tau = 1$ とみなしても構わない。さらに、 M 個の株式銘柄の組合せ比率 b_i 、(ただし $\sum_{i=1}^M b_i = 1$) からポートフォリオを構築したとき、期待収益率 $\tilde{r}_p(t+1)$ とリスク $\sigma_p(t+1)$ は次式になる。

$$\tilde{r}_p(t+1) = \sum_{i=1}^M b_i \tilde{r}_i(t+1) \quad (6)$$

$$\sigma_p(t+1) = \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M b_i b_j \sigma_{ij}(t+1)} \quad (7)$$

ここで σ_{ij} は共分散であり、次式で算出される。

$$\sigma_{ij}(t+1) = \sqrt{\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} (r_i(t-k\tau) - \tilde{r}_i(t))(r_j(t-k\tau) - \tilde{r}_j(t))} \quad (8)$$

次に提案法として前章の予測モデルをポートフォリオ理論に取り入れる。式 (2) で推定した F は、非線形 AR モデルまたは線形 AR モデルの係数ベクトルであるので、各成分を a_k , ($k = 0 \sim d-1$) とすると期待収益率 $\tilde{r}_i(t+1)$ を次式で書き直すことができる。

$$\tilde{r}_i(t+1) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k r_i(t-k\tau) \quad (9)$$

つまり $\tilde{r}_i(t+1)$ は式 (2)(3) による予測値である。この AR 係数 a_k を全て $1/d$ とすれば、式 (4) の従来のポートフォリ

Portfolio selection based on nonlinear prediction for stock markets

[†] Satoshi Inose (10nm909l@hcs.ibaraki.ac.jp)

^{††} Tomoya Suzuki (tsuzuki@mx.ibaraki.ac.jp)

Major in Intelligent Systems Engineering, Graduate School of Science and Engineering, Ibaraki University ([†])

Department of Intelligent Systems Engineering, College of Engineering, Ibaraki University (^{††})
4-12-1 Nakanarusawa-cho, Hitachi, Ibaraki 316-8511, Japan

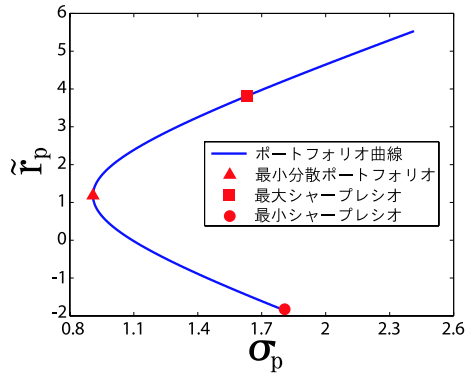


図 2: ポートフォリオ曲線と効果的な投資比率選択.

オ理論と等価になる．つまり，式 (9) は従来法を拡張して一般化している．

次に，式 (5) のリスクを予測モデルに基づいて拡張する．そこで本研究では，予測誤差をリスクと捉え，式 (7) 中の共分散 σ_{ij} を以下のように算出する．

$$\sigma_{ij}(t+1) = \sqrt{\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} (r_i(t-k\tau) - \bar{r}_i(t-k\tau))(r_j(t-k\tau) - \bar{r}_j(t-k\tau))} \quad (10)$$

ここで $r_i(t-k\tau) - \bar{r}_i(t-k\tau)$ は銘柄 i に対する過去の予測誤差である．式 (10) を式 (7) に代入することでポートフォリオ全体のリスク $\sigma_p(t+1)$ が得られる．

さらに，個別銘柄のリスク $\sigma_i(t+1)$ も示しておく．過去の予測誤差を参照すれば，

$$\sigma_i(t+1) = \sqrt{\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} (r_i(t-k\tau) - \bar{r}_i(t-k\tau))^2} \quad (11)$$

で算出される．ここで従来法においては，式 (4) より $\bar{r}_i(t-k\tau) = \bar{r}_i(t-k\tau-1)$ であるため，

$$\sigma_i(t+1) = \sqrt{\frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} (r_i(t-k\tau) - \bar{r}_i(t-k\tau-1))^2} \quad (12)$$

と書ける．ここで $\bar{r}_i$ は標本平均であるので，中心極限定理より d が十分に大きくなれば， $\bar{r}_i$ の分散値は 0 に漸近する．よって $\bar{r}_i(t-k\tau-1) \doteq \bar{r}_i(t-k\tau)$ であり，式 (12) は式 (5) と等価になる．これは式 (8) の共分散についても同様に成り立つ．つまり，リスクの算出においても提案法は従来法の自然な拡張であり一般化したものといえる．

4 投資シミュレーション

前章で算出した $\bar{r}_p$ と σ_p は株式の投資比率 $\{b_i\}$ に応じて図 2 のようなポートフォリオ曲線を描く．ここで $\bar{r}_p/\sigma_p$ をシャープレシオ S_r とすると，効果的な投資比率は図 2 中の 3 点によって決定される．まず $\min\{\sigma_p\}$ の最小分散ポートフォリオであり，次に $\max\{S_r\}$ の最大シャープレシオである．後者は割に合ったリスクならば回避せずに高収益を目指すものである．これら 2 つは，時刻 t で株を買い，時刻 $t+1$ で売ることを前提としているため， $\min\{\sigma_p\} \geq 0$ の時のみ取引する方法を“手法 A”， $\max\{S_r\} \geq 0$ の時のみ取引する方法を“手法 B”とする．逆に株価が値下がりする場合，時刻 t で株を売り時刻 $t+1$ で買戻すという空売りが有効である．その場合は最小シャープレシオ $\min\{S_r\}$ を実現するポートフォリオで空売りを行う．ただし， $|\max\{S_r\}| \geq |\min\{S_r\}|$ の場合は手法 B を採用し， $|\max\{S_r\}| < |\min\{S_r\}|$ の時のみ空売りを行う．この方法を“手法 C”とする．図 1 で予測した銘柄を用いて投資シミュレーションを行った． $\bar{r}_p$ と σ_p の算出には，3 章のように従来法 [1]，線形予測法，非線形予測法を用いた．また $d = 5$ とした．図 3 において，初期

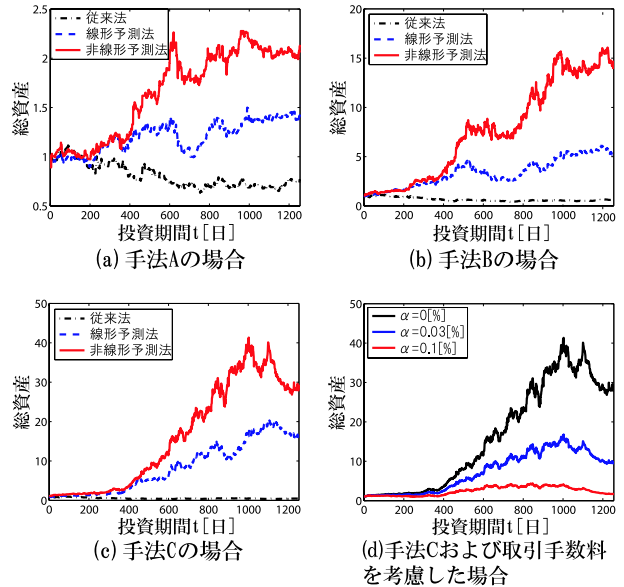


図 3: 投資シミュレーションによる総資産の変化.

表 1: 各予測法による投資結果.

	従来法	線形予測法	非線形予測法
平均最終額	1.0029	4.6271	7.0709
最良最終額	46.1097	206.2964	311.8016
最悪最終額	0.0287	0.0310	0.1300
元本割れ率	70.68%	20.11%	6.67%

投資額を 1 とした時の総資産の変動を示す．手法 A ~ C のどれを用いても提案したポートフォリオ構築法は従来法よりも高利益を獲得でき，さらに線形予測法よりも非線形予測法のほうが優れている結果となった．これは図 1 で示した結果と同様に，株価変動には非線形的ダイナミクスが内在していることを示唆している．さらに，図 3(d) では実際の投資状況を考慮すべく，毎回の取引総額の $\alpha[\%]$ を取引手数料として差引いたシミュレーションも行った．この場合においても十分に利益を得ることに成功しており，本提案手法は現実の投資戦略として活用できることを表わしている．

次に，全 201 銘柄から 2 銘柄を用いて同様の投資シミュレーションを行った．手法 C による全 $n \cdot C_k$ 回分の投資結果を表 1 にまとめた．元本割れとは総資産が 1 以下になることであり，この発生率を元本割れ率と呼ぶ．このシミュレーションにおいても同様に，提案手法の有用性を確認できる．全ての項目において非線形予測法を融合したポートフォリオ理論が最良であり，従来法に勝る．

5 まとめ

本研究では，既存のポートフォリオ理論に非線形予測法を融合し，実データを用いた投資シミュレーションによって提案手法の有用性を確認した．また，線形予測に対する非線形予測の有用性も確認し，株価変動には非線形的なダイナミクスが内在することを示唆した．

なお本研究の一部は，日本学術振興会科学補助金若手研究 (B)(No.22700227) の援助により行われました．

参考文献

- [1] 榊原茂樹，青山護，浅野幸弘，“証券投資論”，日本経済新聞出版社，2008．
- [2] 合原一幸，池口徹，山田泰司，小室元政，“カオス時系列解析の基礎と応用”，産業図書株式会社，2005．