

量子 2 準位系での固有値推定での量子効果

林 正 人^{†,††}

量子 2 準位系での状態の密度行列の固有値を推定する問題を、まったくエンタングルメントを用いない測定による推定と、2 つの系間の相関を用いた測定による推定とを比較する。その結果、純粋状態に近い場合については、Hendrych ら (2003) が行った量子相関を用いた実験による推定が、ある種のまったく相関を用いない場合での最適な実験による推定よりもより高い精度を与えることを示した。Hendrych らの実験では推定精度について十分に検討していなかったが、改めて、推定精度に注意して同種の実験を行えば、量子相関による推定精度の向上を、実験的に実証できることと思われる。

Quantum Effect on Eigen-value Estimation in Quantum Two-level System

MASAHITO HAYASHI^{†,††}

Concerning the estimation problem of the eigen-value of the density in the quantum two-level system, I compare the accuracy of an estimator based on a quantum measurement with quantum correlation in measuring apparatus with that of the optimal estimator based on a measurement without quantum correlation. It is proven that the estimator realized by Hendrych, et al. (2003) is better than the optimal case without quantum correlation when the true state is closed to a pure state. Although Hendrych, et al. did not discuss the accuracy of their estimation sufficiently, it is expected to be able to be realized to perform an estimation whose accuracy is better than the optimal case without quantum correlation.

1. はじめに

量子計算をはじめとして量子暗号など様々な量子情報処理が提案されている。これらの情報処理では (量子力学的に相関を持つ) 状態が重要な役割を果たすことが少なくない。エンタングルした状態は量子系にのみ存在するもので、量子力学的な効果を有効に発揮するには必要であることが多い。一方、量子情報処理の 1 つである量子系での統計的推測では複数の状態が独立に準備されている状況を想定するため、エンタングルした状態を想定することは少ない。しかし、状態がエンタングルしていない場合でも、すなわち、量子力学的に相関を持っていない場合でも、量子力学的な相

関 (量子相関) を持つ測定を行った方が、そうでない測定を行う場合よりも推定精度が良くなる場合がある。量子相関を持つ測定は量子系特有のものであるので、それを持たない測定との推定精度の差が量子効果を表していると考えられる。本論文では、最も簡単な量子系である量子 2 準位系での密度行列の固有値の推定問題に注目し、実現可能な量子相関を持つ測定で明確に量子効果が表れるものを提案する。もちろん、量子相関を持つ測定が重要な役割を果たすのは量子系の統計的推測に限ったことではない。量子系での通信路符号化でもそれを用いることで通信路容量が向上することが理論的には確かめられている。それゆえ、量子相関を持つ量子測定の効果に関する研究は量子情報理論での 1 つの重要なテーマである。本論文では推定論の枠組みでこのような量子効果を実験的に検証する枠組みを提案する。

量子推定理論は Helstrom^{1),2)} によって始められ、Holevo³⁾ によって、その数学的基礎が与えられた。その後、量子推定論は長岡をはじめとする多くの研究者によって数多くの貢献がなされ^{4),6)}、量子情報理論の他の研究テーマにも影響を与えている⁷⁾。本論文では量子 2 準位系での密度行列の固有値を推定する問題

[†] 独立行政法人科学技術振興機構 ERATO 今井量子計算機構プロジェクト

ERATO, Quantum Computation and Information Project, JST

^{††} 東京大学大学院情報理工学系研究科 21 世紀 COE 「情報科学技術戦略コア」超ロバスト計算原理プロジェクト

Superrobust Computation Project, Information Science and Technology Strategic Core, (21st Century COE by MEXT), Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo

を扱う。我々の設定では固有値だけでなく、攪乱変数と見なせる固有ベクトルまでも未知である設定で、固有値だけを推定することとした。そして、この問題を漸近論の枠組みで論じた。漸近論は極限操作が現れるため、非専門家の間ではとかく敬遠されがちであるが、問題を著しくシンプルにするという特徴があるので、実際のデータ操作や実験を行う前に、取り扱う問題の大まかな枠組みを理解し論じるためにはきわめて有効である。このようにユニタリ方向を攪乱パラメータとしてとらえ固有値推定を漸近論の枠組みでとらえる研究は Keyl ら⁸⁾ や松本¹³⁾ によってなされている。彼らは表現論的な構造を用いた測定によって、その固有値を推定する方法を提案し、その漸近的性能がきわめて優れていることを示した。彼らの提案した測定は理論的に優れてはいるものの、その実装には相当の量子相関の利用が必要であるため、実現は困難であると思われる。一方で、本研究では比較の実装可能性が高い測定のクラスに限定して推定のための測定を最適化を行った。このような設定を採用することで、比較の実装が容易な量子相関を用いた測定であっても、それをまったく用いない測定の範囲で最適な測定を、推定効率の面で上回ることが可能であることを示した。そして、このような測定の1つが、Hendrych ら¹⁰⁾ によってすでに実装されているものであることを示した。これは、先にも述べたように量子相関の重要性を示唆するとともに、それが十分利用可能なものであることも同時に強く示唆している。ただ、Hendrych らの実験では、この方法での推定可能性のみ指摘した実験であり、推定効率までは意識されていない。

一方で、このようにクラスを制限した最適化問題には、上述の理論的最適限界の導出にない取扱いの難しさが存在する。これを厳密に取り扱うために、本論文では攪乱変数についてミニマックス法や Bayes 法を漸近論の枠組みで適用した。Keyl ら⁸⁾ や松本¹³⁾ が用いた手法は、ある意味で非漸近的な枠組みでのミニマックス法や Bayes 法と見なすことができ、本論文での議論とは異なる。本論文で採用した手法の詳細は付録 A.3 で述べることになるが、この手法を採用することで、攪乱変数に依存しない推定性能を保証する議論が可能となった。だが、通常はミニマックス法や Bayes 法は未知の推定すべきパラメータに関して用いることが多いので注意を要する。

以下本論文の構成について説明する。最初に 2.1 節ではこの問題を扱うために必要な、量子系の数学的な定式化を説明する。そして、2.2 節と 2.3 節ではそれぞれ最低限の予備知識の範囲で、確率分布族のパラメータ

推定と量子状態推定の基本的事項を解説する。次に 3 章では量子 2 準位系での密度行列の固有値を推定の数学的定式化を行い、4 章では、密度行列の固有ベクトルが既知であり（すなわち攪乱変数がない場合）その固有値のみを推定する問題を扱う。この場合の問題はある意味で古典的な場合に帰着できる。一方、固有ベクトルが未知である場合では、既知である場合よりも推定精度が低下するが、その程度は、本論文で論じるように問題設定に依存する。5 章と 7 章ではすべてのサンプル系に対して、推定のためのデータ抽出過程のための測定を個別に行う設定を考える。特に、5 章では、これまでに得られたデータに応じた逐次的な測定の改良をまったく許さない設定の下で、推定のための測定の最適化を行った。これは測定過程において、サンプル系間の相関をまったく使わなかった設定である。一方、測定過程において、サンプル系間に相関を用いることも可能である。その例として、測定そのものは各サンプル系に対して個別に行うが、逐次的に測定を改良する手法が考えられる。これはある意味で古典的な相関を用いた設定であり、7 章で扱われる。逆に、量子系であるので、測定過程においてサンプル系の量子的な相関を用いることも可能である。このような設定は 6 章で扱われる。ただし、本論文で扱った問題では、推定のために用いる相関は 2 つのサンプル系の間だけであり、3 つ以上のサンプル系にまたがる相関はいっさい用いない設定を採用している。なぜなら、本論文の目的が物理的に実装が容易であり、かつ、量子力学的な相関の効果が明示的に現れる実験を提案することにあるからである。そのため、実装のための難易度が上がると思われる、3 つ以上のサンプル系にまたがる相関を用いた設定は扱わなかった。なお、本論文で扱う問題では情報源である未知の量子状態には古典的なものも含め、いっさいの相関がないと仮定している。それゆえ相関があるのは、あくまでも我々が推定のために行う操作のみである。

そして、付録 A.1 では本論文で必要となる Jensen の不等式と、その量子的な設定でのある種の拡張について述べる。続いて、付録 A.2 では確率分布の漸近理論について既知の成果を要約する。本論文で扱う問題では推定すべきパラメータが 1 つであるが、攪乱変数がある設定扱うため、推定すべきパラメータが複数存在する場合や攪乱変数がある場合での確率分布族のパラメータの推定についてもここでは扱った。さらに付録 A.3 では、群対称性がある場合での推定の漸近理論について扱った。すなわち、攪乱変数が群の作用に関して共変的であり、推定すべきパラメータが群の

作用に関して不変である場合を扱った．先行研究として Holevo³⁾ により群共変的モデルの推定論が得られているが、彼が扱った場合は、攪乱変数がなく、推定すべき変数が共変的である場合であった．ここで扱った議論は Holevo の議論とは手法に類似した点があるが、本質的に異なった問題を扱っている．この部分のポイントは直接平均 2 乗誤差に対しては、Holevo の議論との類似を考えず、むしろ Fisher 情報量に注目した点である．

2. 準備

2.1 量子系の数学的記述と推定の定式化

ここでは量子系を記述するために、基礎的な事項を説明する．以下に述べられることはきわめて基本的であるが、標準的な量子力学の教科書には必ずしも十分に記述されていないので注意を要する．量子力学では注目する物理系（量子系）は Hilbert 空間（系の表現空間、以下 \mathcal{H} と記す）で記述され、状態は Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の密度行列で記述される． \mathcal{H} 上の密度行列とは \mathcal{H} から \mathcal{H} へのエルミートな行列で半正定値かつその Trace が 1 となるものである．このような密度行列の全体を $S(\mathcal{H})$ で表す．

測定は \mathcal{H} 上の単位行列 I の positive semi-definite 行列による分解 $\{M_i\}$ で記述される．この分解 $\{M_i\}$ は POVM (正作用素値測定 Positive Operator-Valued Measure) と呼ばれる．系が密度行列 $\rho \in S(\mathcal{H})$ に対応する状態にあるとき POVM $\{M_i\}_{i=1}^k$ に対応する測定を行うとその測定値 $i = 1, \dots, k$ は確率分布

$$P_\rho^M(i) := \text{Tr } \rho M_i \tag{1}$$

に従う．これが確率になるために、 ρ および M の positive semi-definite であることが効いていることに注意されたい．この定式化では状態と測定の再現性が暗に仮定されている．そうでなければ、式 (1) を実験により検証することが不可能である．

2 つの量子系 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ の合成系はテンソル積空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ で記述される．特に各系の状態の密度行列がそれぞれ ρ_1, ρ_2 で与えられており、相互作用がないときには、合成系上の状態の密度行列は $\rho_1 \otimes \rho_2$ で与えられる．量子力学系におけるパラメータ推定では、状態に対応する未知の密度行列が密度行列族 $S = \{\rho_\theta \in S(\mathcal{H}) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ に含まれていることが既知のうえで、測定値から未知のパラメータ θ を推定することになる．本論文ではパラメータが 1 つの量子状態族 $\{\rho_\theta \in S(\mathcal{H}) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ のパラメータ推定について考えることになる．この場合は測定に対

応する POVM $M = \{M_i\}$ の選択の自由度があるわけである．それゆえ、 M に応じて決まる確率分布族 $\{P_{\rho_\theta}^M | \theta \in \Theta\}$ のパラメータ推定に帰着できる．

2.2 確率分布族の推定の漸近論

古典的な場合、すなわち確率分布族の推定での場合には、この議論の一般論がすでに確立している．パラメータが 1 つの確率分布族 $\{p_\theta(\omega) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ のパラメータ推定では、未知の分布 p_θ に独立に従う n 個のデータ $\vec{\omega}_n := (\omega_1, \dots, \omega_n)$ から、未知パラメータを決定するという設定がしばしば採用される．この場合、誤差の基準として平均 2 乗誤差 (MSE)

$$v_\theta(\hat{\theta}_n) := \int_{\Omega^n} (\hat{\theta}_n(\vec{\omega}_n) - \theta)^2 p_\theta^n(d\vec{\omega}_n)$$

を用いることが多い．そして、推定方法として最尤推定 $\hat{\theta}_{ML,n}(\vec{\omega}_n) := \text{argmax}_{\theta \in \Theta} p_\theta(\omega_1) \cdots p_\theta(\omega_n)$ を用いることが多い．データ数 n が大きいとき、最尤推定 $\hat{\theta}_{ML,n}$ の平均 2 乗誤差は漸近的に 0 に収束するが、その早さが問題となり、次の漸近的な近似式

$$v_\theta(\hat{\theta}_{ML,n}) \cong J_\theta^{-1} \frac{1}{n} \\ J_\theta := \int \left(\frac{d}{d\theta} \log p_\theta(\omega) \right)^2 p_\theta(\omega) d\omega \tag{2}$$

が成り立つ．なお、 J_θ は Fisher 情報量とよばれる．逆に推定量の列 $\{\hat{\theta}_n(\vec{\omega}_n)\}$ に対して、極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} n v_\theta(\hat{\theta}_n)$ が $\theta \in \Theta$ についてある意味で一樣収束するのであれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n v_\theta(\hat{\theta}_n) \geq J_\theta^{-1} \tag{3}$$

となる．それゆえ、漸近一次の議論の範囲では最尤推定量が最適となり、Fisher 情報量の値に注目することが多い．ここで確率空間 Ω から確率空間 Ω' への写像 f を考えると、自然に確率空間 Ω' 上の分布 p'_θ を $p'_\theta(B) := p_\theta(f^{-1}(B))$ (B は Ω' の部分集合) で定義できる．この分布 p'_θ のなす分布族の Fisher 情報量を J'_θ で表すと、以下の Fisher 情報量の単調性とよばれる不等式が成り立つ．

$$J'_\theta \leq J_\theta \tag{4}$$

この不等式が成り立つことは、Fisher 情報量の持つ意味 (式 (2) および不等式 (3)) を考えれば容易に確認できる．確率分布族 $\{p'_\theta\}$ に対する推定量 $\hat{\theta}'$ は推定量 $\hat{\theta}(\omega) := \hat{\theta}'(f(\omega))$ を考えることで自然に、確率分布族 $\{p_\theta\}$ に対する推定量と見なすことができる．両者の平均 2 乗誤差は等しいので、分布族 $\{p'_\theta\}$ の平均 2 乗誤差の限界は分布族 $\{p_\theta\}$ の平均 2 乗誤差の限界より大きいことが分かる．これより、不等式 (4) が確認できる．しかし、極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} n v_\theta(\hat{\theta}_n)$ が J_θ^{-1}

と一致する推定量は最尤推定量だけではない、漸近的に最適な推定量は他にも複数存在する。それらの中で優劣を扱うには、その次のオーダの係数を議論することが多い。

2.3 量子系での推定の漸近論

次にパラメータが1つの量子状態族 $\{\rho_\theta \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \mid \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ のパラメータ推定について考えてみよう。以下では M に応じて決まる確率分布族 $\{P_{\rho_\theta}^M \mid \theta \in \Theta\}$ の Fisher 情報量を J_θ^M で表す。未知のパラメータ θ に応じて決まる、同一の状態 ρ_θ が n 個独立に準備されている状況を考えるわけであるが、この場合その表現空間は $\mathcal{H}^{\otimes n}$ になる。たとえば個々の系に対して、同一の測定 M を行い、確率分布族 $\{P_{\rho_\theta}^M \mid \theta \in \Theta\}$ に対する最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML,n}$ を適用した場合の平均2乗誤差は $v_\theta(M \times n, \hat{\theta}_{ML,n}) \cong (J_\theta^M)^{-1} \frac{1}{n}$ となる ($M \times n$ で $\mathcal{H}^{\otimes n}$ の各量子系 \mathcal{H} に対して独立に POVM M を行うという測定を表すこととする)。しかも、先と同様に推定量の列 $\{(M^n, \hat{\theta}_n)\}$ に対して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n v_\theta(M^n, \hat{\theta}_n)$ が $\theta \in \Theta$ について一様収束するのであれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n v_\theta(\hat{\theta}_{ML,n}) \geq \min_M (J_\theta^M)^{-1}$ となることが示せる。それゆえ、 J_θ^M を最大にする測定 M を行い、最尤推定量を用いる方法が漸近一次的議論の範囲では最適となる。しかし、この戦略には J_θ^M を最大化する最適な測定 M が一般には θ に依存するという致命的な欠陥がある。したがって、推定精度は $\min_M (J_\theta^M)^{-1} \frac{1}{n}$ より小さくなることはない。実は、この限界は適応的に測定を改良することで漸近的に達成可能であることが知られている^{15),16)}。一方、適応的な測定の改良を許さない設定では、 $\operatorname{argmin}_M (J_\theta^M)^{-1}$ が未知パラメータに依存する場合は達成しない。

なお、この値の導出であるが、以下に定義する SLD Fisher 情報量^{1),2)} J_θ の逆数と一致することが知られている：

$$J_\theta := \operatorname{Tr} L_\theta^2 \rho_\theta, \quad \frac{d\rho_\theta}{d\theta} = \frac{1}{2} (L_\theta \rho_\theta + \rho_\theta L_\theta)$$

ここで L_θ は対称対数微分 (SLD) とよばれ、エルミート行列である。また、 $J_\theta = J_\theta^M$ となる測定は対称対数微分 L_θ のスペクトル分解に対応する測定で与えられる⁵⁾。すなわち、 L_θ の対角化が $L_\theta = \sum_k l_k E_k$ (l_k は固有値、 E_k は射影行列) で与えられるとすると、 M が射影行列による単位行列の分解 $\{E_k\}$ からなる POVM と等しいとき、 $J_\theta = J_\theta^M$ となる。それゆえ、このような測定 $\{E_k\}$ が未知パラメータに依存しないモデルであれば、解析がきわめてやさしい。

3. 量子2準位系の固有値推定

量子系 \mathbb{C}^2 は量子2準位系とよばれ、最も基本的な量子系である。この系の密度行列は 2×2 のエルミート行列で表されるが、以下のようなパラメータをとることが可能である。 $0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$:

$$\rho_{r,\theta} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r \cos \theta_1 & r \sin \theta_1 e^{i\theta_2} \\ r \sin \theta_1 e^{-i\theta_2} & 1 - r \cos \theta_1 \end{pmatrix},$$

この場合、 r が固有値に対応し、 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ が固有ベクトルに対応する。以下では、パラメータ r のみを推定する問題を考える。すなわち、推定すべきパラメータは r 1つのみであるが、攪乱変数として θ がある。この問題では θ を推定する必要はないが、これが未知であれば、平均2乗誤差が SLD Fisher 情報量の逆数となる推定量を構成する測定は θ に依存する。そのため、そのような精度を持つ推定のためには測定を適応的に改良する必要がある。実際の実験では、適応的に測定を改良することが困難である場合が多い。それゆえ、以下では未知状態 $\rho_{r,\theta}$ にある量子系 \mathbb{C}^2 を $2m$ 個、独立に準備し、各系に独立に同一測定 M を行い r を推定する場合と、未知状態 $\rho_{r,\theta}^{\otimes 2}$ にある量子系 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ を m 個、独立に準備し、各系に独立に同一測定 M を行い r を推定する場合を比較する。前者で最適な場合の平均2乗誤差と、後者で最適な場合の平均2乗誤差の差が、量子相関を用いることのメリットと見なすことができる。

4. 基底が分かっている場合の固有値の推定

ここでもし、 θ が既知であるならば、

$$\begin{aligned} |\theta\rangle &:= \cos \theta_1 |+\rangle + e^{i\theta_2} \sin \theta_1 |-\rangle \\ |\theta^\perp\rangle &:= \sin \theta_1 |+\rangle - e^{i\theta_2} \cos \theta_1 |-\rangle \\ |+\rangle &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおくと、 $\rho_{r,\theta} = \frac{1+r}{2} |\theta\rangle\langle\theta| + \frac{1-r}{2} |\theta^\perp\rangle\langle\theta^\perp|$ となる。それゆえ、 θ に対応する基底 $|\theta\rangle, |\theta^\perp\rangle$ を用いて測定すると、固有値に対応する二項分布 $\frac{1+r}{2}, \frac{1-r}{2}$ が得られる。実際、 θ を固定したときに得られる量子状態族 $\{\rho_{r,\theta} \mid 0 < r < 1\}$ の SLD Fisher 情報量は $\frac{1}{1-r^2}$ であり、 n 個の同一状態 $\rho_{r,\theta}$ にある量子系にこの測定を行い、 θ に対応する測定値が k 個得られた場合は、 $\frac{k}{n} = \frac{1+\hat{r}_n}{2}$ と推定値 \hat{r}_n を定めると、その平均2乗誤差は $\frac{1-r^2}{n}$ となる。

5. 量子相関を用いない場合の最適化

ここでは量子相関を用いない場合での1次漸近論

の最適化を行う．最初に，測定 M を用いて推定する場合を考えよう．すると，収束に関する一様性を満たす推定量 \hat{r}_n を用いると仮定すると，その平均 2 乗誤差は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n v_{r,\theta}(M \times n, \hat{r}_n) \geq (J_{r,\theta;r}^M)^{-1} \quad (5)$$

となる．ここで， $J_{r,\theta;r}^M$ は θ と測定 M に依存した r が未知パラメータである確率分布族 $\{P_{r,\theta}^M | 0 < r < 1\}$ の Fisher 情報量である．不等式 (5) は θ が未知である場合は 2.2 節の議論から直接導かれる．それゆえ， θ が既知である場合も成り立つ．さらに，付録 A.2.3 で述べるように，適切な古典的な推定量 \hat{r}_n を選ぶと式 (5) で等号が成立する．

このモデルではパラメータ r を固定すると，パラメータ θ のなす空間は 3 次元球面になり，ユニタリ群の作用は，球面上の回転に相当する．すなわち， $SU(2)$ の要素 U に対して， $U \rho_{r,\theta} U^* = \rho_{r,O(U)\theta}$ となる 3 次元空間上の回転 $O(U)$ が対応する．そのような θ に関する対称な構造に注目し， θ についての最悪な場合すなわち $\max_{\theta} \lim_{n \rightarrow \infty} n v_{\theta}(M \times n, \hat{r}_n)$ に注目し，これを最適化する問題を考える．この手法はミニマックス法とよばれ，統計学などでもしばしば用いられる．ただし，通常はミニマックス法は推定したいパラメータについて最悪の場合を考えるので，注意を要する．

ここでパラメータ θ のなす空間に全測度が 1 となる回転に関して不変な測度 $\mu(d\theta)$ を考える．

$$\mu(d\theta) := \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_1}{\pi} d\theta_1 d\theta_2$$

すると，付録 A.2.3 で示すように，不等式

$$\begin{aligned} \max_{\theta} \lim_{n \rightarrow \infty} n v_{r,\theta}(M \times n, \hat{r}_n) \\ \geq \left(\int J_{r,\theta;r}^M \mu(d\theta) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

が成立し，測定 M がある種の対称性を持ち， \hat{r}_n が最尤推定であるとき，等号が成り立つ．

そして，この問題は付録 A.2.3 で示すように，より一般的な設定の下で，群共変的測定とよばれるある種の対称性満たす測定 M に限った場合の $\int J_{r,\theta;r}^M \mu(d\theta)$ の最大化問題に帰着させることができる（群共変的測定では $J_{r,\theta;r}^M$ は θ に依存しないので， $J_{r,\theta;r}^M$ を最大化させる問題とみることもできる）．しかも，付録 A.3.3 で示すように，後の式 (8) で与える測定 M_{opt} について，

$$\int J_{r,\theta;r}^M \mu(d\theta) \leq J_{r,\theta;r}^{M_{opt}} \quad (7)$$

が成り立つ． $J_{r,\theta;r}^{M_{opt}}$ は後に計算で確かめるように θ に

依存しない．それゆえ，測定 M_{opt} はある種の対称性を満たすので，付録 A.3.1 の補題 1 最尤推定量 $\hat{r}_{ML,n}$ について，

$$\begin{aligned} \max_{\theta} \lim_{n \rightarrow \infty} n v_{r,\theta}(M_{opt} \times n, \hat{r}_n) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} n v_{r,\theta_0}(M_{opt} \times n, \hat{r}_n) = \left(J_{r,\theta_0;r}^{M_{opt}} \right)^{-1} \end{aligned}$$

が成り立つ．この式は，今考えている設定では測定 M_{opt} を行い，最尤推定を行う推定方法が漸的に最適であることを示している．なお，測定 M_{opt} は以下で与えられる．

$$M_{opt}(d\theta) = 2|\theta\rangle\langle\theta|\mu(d\theta) \quad (8)$$

ここで式 (8) の係数 2 は空間の次元に対応するものである．これをかけないと全測度が単位行列にならない．

このほかに統計学では未知パラメータに事前分布を仮定し，その事前分布についての平均値に注目するという方法は Bayes 法とよばれ，しばしば採用される．この問題に先の不変測度 $\mu(d\theta)$ を事前分布として Bayes 法を適用すると，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int v_{r,\theta}(M \times n, \hat{r}_n) \mu(d\theta)$$

に注目することになる．なお，統計学で Bayes 法を指す場合，推定すべきパラメータについて平均化を意味することが多い．ここでは，攪乱変数について平均化しているので注意を要する．そして，先の議論から積分と極限を入れ替えると，不等式

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \int v_{r,\theta}(M \times n, \hat{r}_n) \mu(d\theta) \\ \geq \int (J_{r,\theta}^M)^{-1} \mu(d\theta) \geq \left(\int J_{r,\theta}^M \mu(d\theta) \right)^{-1} \\ \geq \left(J_{r,\theta;r}^{M_{opt}} \right)^{-1} \end{aligned}$$

が成り立つ．なお，2 つの不等式では関数 $x \mapsto 1/x$ が下に凸であることに注目し Jensen の不等式（付録 A.1）を用いた．それゆえ，双方の問題設定では，測定 M_{opt} を行い，最尤推定を用いる方法が最適となる．

次に，

$$\langle\theta|\rho_{r,0}|\theta\rangle = \frac{1}{2}(1+r \cos 2\theta_1)$$

と計算できることから，

$$\begin{aligned} J_{r,\theta;r}^{M_{opt}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{d}{dr} \log(1+r \cos 2\theta_1) \right)^2 \\ &\quad \times \frac{(1+r \cos 2\theta_1) 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{2\pi} d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^3} \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \right) \end{aligned}$$

と計算できる．

なお、ここで得られた最適測定が単にユニタリ方向の情報しか与えていないようにみえることに違和感を持つ読者もいるであろう．確かに、このような測定ではデータ1つでは固有値に関する情報はまったく情報を与えない．また、どんな測定を行っても、1回の測定だけからは、ある意味で固有値に関する情報を引き出すことは不可能である．これは、どんな固有値の場合でもユニタリ方向に平均化すれば完全混合状態になることから明らかであろう．

それゆえ、固有値に関するなんらかの情報を得るには、最低2つのデータが必要である．そしてこの章では n 個のデータから最尤法を用いて推定する方法を提案している．この手法では得られたデータのばらつき具合で固有値を推定することになる．たとえば、特定の方向に偏ったデータが得られれば、純粋状態に近い状態であると推定できる．逆に、あまり偏りなく、一様に近ければ、完全混合状態に近いと推定できる．このようにデータ1つではまったく固有値に関する情報を持たないデータであっても、複数のデータを集めることで効率的な推定が可能となる．

6. 量子相関を用いる場合の最適化

はじめに一度のみ相関を使う場合との比較を行う．量子系 $\mathbb{C}^4 = (\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ 上の状態族 $\{\rho_{r,\theta}^{\otimes 2}\}$ における、パラメータ r を推定する問題を考える．この場合群 $SU(2)$ の要素 U による、作用 $U^{\otimes 2}$ の下でこの状態族は閉じていることが示せる．それゆえ、先の章と同種の議論により、群共变的測定の中で、 $J_{r,\theta;r}^M$ を最大化する問題に帰着できる．詳しくは付録 A.3.2 を参照のこと．なお、先の場合と異なり、 $J_{r,\theta;r}^M$ を最大化する共变的測定 M は r に依存すると思われる．

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ は $\{|+, +\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle), |-, -\rangle\}$ で張られる空間 \mathcal{H}_s と $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle)$ で張られる1次元空間 \mathcal{H}_a の直和 $\mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_a$ に既約分解できる．たとえば、きわめて簡単な群共变的測定として、 \mathcal{H}_s と \mathcal{H}_a への射影 P_s, P_a からなる2値測定 M_1 がある．この測定の場合、 P_s に対応する測定値が得られる確率は $\frac{3+r^2}{4}$ であり、 P_a に対応する測定値が得られる確率は $\frac{1-r^2}{4}$ である．したがって、Fisher 情報量 $J_{r,\theta}^{M_1}$ は $\frac{4r^2}{(1-r^2)(3+r^2)}$ である．

もちろん、この問題での推定精度の限界は群共变的測定の中での $J_{r,\theta}^M$ の最大値である．この最大化問題を議論するには、 \mathcal{H}_a は1次元であるので付録 A.3.3 の式 (39) より、以下に述べる群共变的な測定に限って最適化すれば十分であることが確認できる．すなわち、

測定値集合が $SU(2)$ と $\{a\}$ の和集合 $SU(2) \amalg \{a\}$ であり、 \mathcal{H}_s 上の状態 ρ_s について決まる測定 M^{P_s} :

$$M^{P_s}(dg) = 3g^{\otimes 2} \rho_s (g^{\otimes 2})^\dagger \nu(dg),$$

$$M^{P_s}(a) = P_a$$

について、 $J_{r,\theta}^{M^{P_s}}$ の最大値を議論することになる．この測定ははじめに測定 $\{P_a, P_s\}$ を行い、 P_s に対応する測定値が得られたときは、測定 $3g^{\otimes 2} \rho_s (g^{\otimes 2})^* \nu(dg)$ を行うことを意味する．

しかし、この最大化問題は難しいので、以下では ρ_s が $|+, +\rangle$ の場合 (M_2)、 ρ_s が $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle)$ の場合 (M_3)、 ρ_s が $|-, -\rangle$ の場合 (M_4)、の場合、さらに、 $M_5 = \frac{1}{3}(M_2 + M_3 + M_4)$ の場合を比較する． M_5 は $SU(2)$ の不変測度に対応する確率で $g \in SU(2)$ を選び、基底 $g^{\otimes 2}|+, +\rangle, g^{\otimes 2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle), g^{\otimes 2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle), g^{\otimes 2}|-, -\rangle$ に対応する測定を行うことで実現できる．ここで扱った測定 M_2, M_3, M_4, M_5 はそれぞれ、対応する状態が群の表現に関して不変部分群 S_1 (1次元円周) を持つので、測定値集合は $SU(2) = S^3$ (3次元球面) を S_1 で割って得られる集合 $S^3/S^1 = S^2$ (2次元球面) となる．不変部分群が単位元だけとなる状態 ρ_s に対応する測定の場合は測定値集合は群 $SU(2)$ となる．

M_2 の場合は $\langle +, + | \rho_{r,\theta} | +, + \rangle = \frac{1}{4}(1 + r \cos 2\theta_1)^2$ となるので、

$$J_{r,\theta;r}^{M_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{d}{dr} \log(1 + r \cos 2\theta_1)^2 \right)^2 \frac{(1 + r \cos 2\theta_1)^2 3 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{4\pi} d\theta_1 d\theta_2$$

$$+ \left(\frac{d}{dr} \log \left(\frac{1-r^2}{4} \right) \right)^2 \frac{1-r^2}{4}$$

$$= \frac{1}{1-r^2}$$

と計算できる．ちなみに、4章で議論したパラメータ θ が既知である場合の Fisher 情報量は考えている量子系が $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ なので、2倍の $\frac{2}{1-r^2}$ となる． M_4 については M_2 と実質的に同じである．

一方、 M_3 の場合は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle +, - | + \langle -, + | \rho_{r,\theta} | \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, -\rangle + |-, +\rangle) = \frac{1}{4}(1 + r^2(-1 + 2 \sin^2 2\theta_1))$$

となるので、

$$J_{r,\theta;r}^{M_3} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{d}{dr} \log(1 + r^2(-1 + 2 \sin^2 2\theta_1)) \right)^2 \frac{(1 + r^2(-1 + 2 \sin^2 2\theta_1)) 3 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{4\pi} d\theta_1 d\theta_2$$

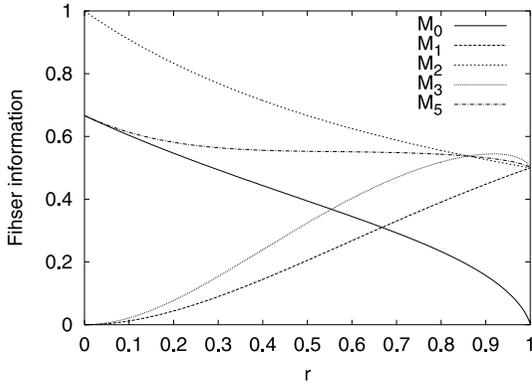


図 1 Fisher 情報量についての M_0, M_1, M_2, M_3, M_5 の比較
Fig. 1 Fisher informations of M_0, M_1, M_2, M_3, M_5 .

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{d}{dr} \log \left(\frac{1-r^2}{4} \right) \right)^2 \frac{1-r^2}{4} \\
 & = \frac{1}{1-r^2} - \frac{3}{r^2} \\
 & + \frac{3}{2\sqrt{2}r^3\sqrt{1+r^2}} \log \left(\frac{\sqrt{1+r^2} + \sqrt{2}r}{\sqrt{1+r^2} - \sqrt{2}r} \right)
 \end{aligned}$$

と計算できる。したがって、 M_5 の Fisher 情報量 $J_{r,\theta;r}^{M_5}$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 J_{r,\theta;r}^{M_5} & = \frac{1}{1-r^2} - \frac{1}{r^2} \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{2}r^3\sqrt{1+r^2}} \log \left(\frac{\sqrt{1+r^2} + \sqrt{2}r}{\sqrt{1+r^2} - \sqrt{2}r} \right)
 \end{aligned}$$

以上のように、 M_1 から M_5 までの 5 種類の量子相関を用いた測定による精度が得られた。

ここで M_0 を先の相関を用いない測定を 2 度行うことによる測定として、上記の測定による Fisher 情報量と比較したものが図 1 である。すなわち、 $J_{r,\theta;r}^{M_0}$ は $J_{r,\theta;r}^{M_{opt}}$ の 2 倍である。なお、これらを直接比較しても、 r が 1 に近いときはどれも発散するので、これらに $1-r$ をかけたものを示した。その結果、個別的に M_0 を行う場合と比較的実現が容易である量子相関を用いた測定である M_1 を比較すると、 r が 0.7 より大きい場合、すなわち非常に純粋状態に近い場合には後者の方が推定精度が良くなることが分かった。 M_1 の次に実現が容易と考えられる M_5 は一様に M_0, M_1 より優れた推定精度を与えることも確認できる。しかし、これら M_0, M_1, M_2, M_3, M_5 の間で他のどれよりもすべての点で小さい推定精度を与えるものはなく、その優劣は未知のパラメータ r に依存する。要約すると、これらの間の大小関係として、

$$J_{r,\theta;r}^{M_1} \leq J_{r,\theta;r}^{M_2} \tag{9}$$

$$J_{r,\theta;r}^{M_1} \leq J_{r,\theta;r}^{M_3} \tag{10}$$

$$\frac{2}{3} J_{r,\theta;r}^{M_2} + \frac{1}{3} J_{r,\theta;r}^{M_3} = J_{r,\theta;r}^{M_5} \tag{11}$$

$$J_{r,\theta;r}^{M_0}, J_{r,\theta;r}^{M_1} \leq J_{r,\theta;r}^{M_5} \tag{12}$$

が成り立つ。式 (9), (10) および (11) の $J_{r,\theta;r}^{M_1}$ に関する式は付録 A.2.1 で与える Fisher 情報量についての情報処理不等式 (28) から自明である。また、式 (11) は本質的に付録 A.3.3 での式 (41) から得られる。 $J_{r,\theta;r}^{M_0}$ についてに不等式 (12) は以下のように証明できる。同一の測定 M_{opt} を 2 回行うことから、1 回目のデータと 2 回のデータを入れ換えても、その出現確率は同一である。それゆえ、この入れ換えに関する同値を \sim で表すと、 M_0 の本来の測定値集合は $S^2 \times S^2$ であるが、 $S^2 \times S^2 / \sim$ と見なしでも本質的に情報の損失はない(すなわち $S^2 \times S^2 / \sim$ は十分統計量である)。したがって、付録 A.2.1 の末尾で述べるように $S^2 \times S^2 / \sim$ を測定値集合としても Fisher 情報量は減少しない。よって、 $S^2 \times S^2 / \sim$ を測定値集合した場合に Fisher 情報量に関する情報処理不等式 (28) を適用することで $J_{r,\theta;r}^{M_0}$ についてに不等式 (12) が示せる。なお、図 1 より、 $J_{r,\theta;r}^{M_0} \leq J_{r,\theta;r}^{M_2}$ が成り立つように考えられるが、同様の方法では示すことはできない。

この章では、用いる量子相関の数を 2 に限定していたが、原理的には準備された全系にまたがる相関を用いて推定することが可能である。Keyl ら⁸⁾ はこのような設定の下で $SU(2)$ の表現の既約成分に射影する測定によって、固有値を推定する方法を提案した。正確には、彼らは一般の次元での固有値推定問題を扱ったので、 $SU(d)$ の表現論を用いている。そして、彼らはそのときの裾確率に注目し、その漸近的な減少率を評価した。彼らが導出した減少率は漸近的には最適である^{9),11),12)}。松本¹³⁾ は同時に平均 2 乗誤差についても議論した。

7. 古典的な相関を用いた場合

6 章では $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ 上の測定で量子的な相関を用いた場合とまったく相関を用いなかった場合とを、群共変的測定の Fisher 情報量 $J_{r,\theta;r}^M$ を基準にして比較した。だが、古典的な相関を用いることで、まったく相関を用いなかった場合の最適値 $J_{r,\theta;r}^{M_{opt}}$ を上回る可能性は否定できない。ところが、以下に示すように、古典的な相関を用いてもこの問題設定の下では $J_{r,\theta;r}^{M_{opt}}$ を上回ることはない。ここで古典的な相関という言葉を定義を明らかにせずを用いたが、最初の系に対する測定の測定値をもとに次の系での測定を決定する適応的な

POVM などがそれにあたる．ただ，以下ではもう少し広いクラスとして separable な POVM の範囲で考
える． $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ 上の POVM $M = \{M_\omega\}$ が

$$M_\omega = M_\omega^1 \otimes M_\omega^2 \tag{13}$$

と書けるとき separable とよばれる．このクラスには 2 つの系の間で互いに測定値を送り合い，少しずつ測定を行うという設定 (LOCC とよばれる) も含まれる．

$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ の場合は考えている群が $SU(2)$ であり，群共変的な測定 M はいくつかの純粋なテンソル積状態 $\rho_{1,k} \otimes \rho_{2,k}$ と k についての確率 p_k を用いて

$$M(k, g) = 4p_k g^{\otimes 2} (\rho_{1,k} \otimes \rho_{2,k}) (g^{\otimes 2})^\dagger \tag{14}$$

と与えられる．これが POVM であるには

$$I = \sum_k \int_{SU(2)} 4p_k g^{\otimes 2} (\rho_{1,k} \otimes \rho_{2,k}) (g^{\otimes 2})^\dagger \nu(dg) \tag{15}$$

である必要がある．もちろん， k が連続である場合も考えられ，その場合は $\sum_k p_k$ を適当な確率測度に置き換えることになる． $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ での射影 P_s, P_a が不変であることから，条件 (15) は

$$\begin{aligned} \text{Tr } P_s \sum_k \int_{SU(2)} 4p_k g^{\otimes 2} (\rho_{1,k} \otimes \rho_{2,k}) (g^{\otimes 2})^\dagger \nu(dg) &= 3 \\ \text{Tr } P_a \sum_k \int_{SU(2)} 4p_k g^{\otimes 2} (\rho_{1,k} \otimes \rho_{2,k}) (g^{\otimes 2})^\dagger \nu(dg) &= 1 \end{aligned}$$

と同値であり，これは

$$\begin{aligned} \text{Tr } P_s \sum_k p_k (\rho_{1,k} \otimes \rho_{2,k}) &= \frac{3}{4}, \\ \text{Tr } P_a \sum_k p_k (\rho_{1,k} \otimes \rho_{2,k}) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と同値である．一方， $\rho_{1,k} \otimes \rho_{2,k}$ は純粋状態であることから， $\beta_k := \text{Tr } \rho_{1,k} \rho_{2,k}$ とすると， $1 - \beta_k = 2 \text{Tr } P_a (\rho_{1,k} \otimes \rho_{2,k})$ が示せる．したがって， $\sum_k p_k = 1$ であることから，上の条件は

$$\sum_k p_k \beta_k = \frac{1}{2} \tag{16}$$

となることと同値となる．そして，その Fisher 情報量は

$$\begin{aligned} J_{r,\theta;r}^M &= \sum_k 4p_k \int_{SU(2)} \left(\frac{d \log (\text{Tr } \rho_{r,\theta} g \rho_{1,k} g^\dagger \text{Tr } \rho_{r,\theta} g \rho_{2,k} g^\dagger)}{dr} \right)^2 \\ &\quad (\text{Tr } \rho_{r,\theta} g \rho_{1,k} g^\dagger \text{Tr } \rho_{r,\theta} g \rho_{2,k} g^\dagger) \nu(dg) \end{aligned}$$

となる．付録 A.4 で示すように，

$$\begin{aligned} J(\beta_k) &:= \int_{SU(2)} \left(\frac{d \log (\text{Tr } \rho_{r,\theta} g \rho_{1,k} g^\dagger \text{Tr } \rho_{r,\theta} g \rho_{2,k} g^\dagger)}{dr} \right)^2 \\ &\quad \times (\text{Tr } \rho_{r,\theta} g \rho_{1,k} g^\dagger \text{Tr } \rho_{r,\theta} g \rho_{2,k} g^\dagger) \nu(dg) \\ &= \frac{2\beta_k - 1}{3} + \frac{\beta_k - 1}{r^2} + \frac{1 - \beta_k}{2r^3} \log \frac{1+r}{1-r} \end{aligned} \tag{17}$$

となるので，条件 (16) から

$$\begin{aligned} J_{r,\theta;r}^M &= \sum_k p_k J(\beta_k) = 2J_{r,\theta;r}^{M_{opt}} \\ &= -\frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^3} \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \end{aligned}$$

を得る．つまり，2 つの系の間で古典的な相関を用いても，個別的に同じ測定を行った場合よりも，推定精度が改良されることがないことが分かる．このことは，固有値の推定問題において，推定精度の改良には量子的な相関が本質的であることを示している．

以下，古典的な相関を用いた推定に関して先行研究との比較を行う．量子相関を用いず，古典的な相関のみ用いた推定での推定精度を取り扱った先行研究^{15),16)}では攪乱変数がない場合を扱っている．このような 1 変数の場合では，2.3 節で述べたように SLD Fisher 情報量の逆数でそのときの最適推定限界が与えられることが知られている．この場合，一般には最適な測定が未知パラメータに依存するので，適応的に測定を改良することで SLD Fisher 情報量の逆数で与えられる最適推定限界が達成可能となる．一方，そのような場合では，古典的な相関を用いず，すべてのサンプル系に対して同一の測定を行ってしまうと，最適限界は一般に達成されない．それゆえ，未知パラメータが 1 つで攪乱変数がない場合では，古典的な相関により推定精度の改良が可能となる．

なお，ここでの結果は，用いる古典的な相関が 2 つのサンプルの間のみとなっているので，上述の先行研究との比較は適切でない．なぜなら用いる古典的な相関に制限を付けずに，以下に述べる 2 段階法を用いると，攪乱変数のある設定でも，局所的な最適限界を達成することが可能であるからである．サンプル数を n としたとき，初めに， \sqrt{n} 個のサンプル系に対して，適当な測定を行い攪乱変数を含む未知パラメータを推定する．そして残りの系に，推定された状態の近傍で推定すべきパラメータについて最適な測定を行う．すると，先行研究^{15),16)}の証明とまったく同じ手法で局所的に最適限界が達成されることが証明できる．したがって，適応的な測定選択を行うことで，局所的な最適限界が漸近的に達成可能である点では両者は同じ

である．ここでのポイントは、ともに、古典的な相関を許す範囲に制限を課していない点である．

それゆえ、この章での結果について考えるには、2 つのサンプルにのみまたがる古典的な相関を用いた推定に限定した議論を行う必要がある．攪乱変数がない場合、1 変数の推定問題では、最適な測定が未知パラメータに依存するため、1 回目の測定を行い、未知パラメータについての情報を得ると、同時に、最適な測定に関する情報が得られる．したがって、この情報を 2 回目の測定の選択に使うことができる．よって、この場合では、2 つのサンプルの間のみの古典的な相関を用いることで推定精度を改良することができる．しかし、この章の内容は 1 回目の測定を行い、それに基づいて 2 回目の測定を選んでも、個別に最適に行った場合を改良することができないことを示している．

以下、この章の結果について不正確であるが直観的な説明を行う．先に 2 準位系の 1 つのサンプル系だけでは、固有値に関する情報がないということを説明したが、実は固有ベクトルに関する情報もまったくない．なぜなら、以下の 2 つの状態はともに基底 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ に対応するからである．

$$\begin{pmatrix} (1+r)/2 & 0 \\ 0 & (1-r)/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1-r)/2 & 0 \\ 0 & (1+r)/2 \end{pmatrix}$$

すなわち、基底 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ に対応する状態は上の 2 つの状態の確率的平均を考え、完全混合状態になると考えられる．同様に、どの基底に対応する状態も、完全混合状態になると考えられる．それゆえ、1 つのサンプル系だけでは、基底（固有ベクトル）に関する情報がまったくないといえる．したがって、1 つのサンプル系から得られたデータには基底に関する情報がまったくないので、これを用いて 2 回目の測定を改良することは不可能である．ただ、この章で証明した内容は 2 つのサンプル系に関してより広い separable な測定に関するものであるので、この議論からは完全には導けない．

8. 量子効果が表れる推定の実現に向けて

現実の測定で量子相関を用いた推定効果を検証するには、不完全な測定について、きちんと議論する必要

がある．先の定式化では n 個の粒子を独立に準備することを前提にしていたが、実際の粒子発生器（光源）から光子を n 個の正確に発生させることはきわめて困難であり、光子の個数を制御できる変数とみることはできない．ここでは Usami ら¹⁷⁾ による定式化に基づいた議論を行う．むしろ現実の系では、光子を発生させる時間が制御可能な変数とみるべきである．この場合、個々の粒子の発生が独立であると見なすと、一定時間に発生される粒子の個数 n はポアソン分布

$$e^{-t} \frac{t^n}{n!} \tag{18}$$

に従うと考えられる．発生時間を長くさせるに従い、発生する粒子の個数の期待値 t が比例して大きくなる．

さらに、測定に対応する POVM $M = \{M_i\}$ は必ずしも $\sum_i M_i = I$ を満たすわけでなく、むしろ一般には

$$\sum_i M_i \leq I \tag{19}$$

で表されると考える方が自然である．なぜなら、測定器でカウントできない場合があるからである．たとえば密度行列 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ で表される粒子を n 個独立に同一の測定器 $M = \{M_i\}_{i=1}^l$ で測定すると、その測定値 i を k_i 個カウントする確率は 2 項分布 $\binom{n}{k_i} (\text{Tr } \rho M_i)^{k_i} (1 - \text{Tr } \rho M_i)^{n-k_i}$ で与えられ、 (k_1, \dots, k_l) は多項分布

$$\frac{n!}{(n - \sum_i k_i)!} \left(1 - \text{Tr } \rho \sum_i M_i\right)^{n - \sum_i k_i} \prod_{i=1}^l \frac{(\text{Tr } \rho M_i)^{k_i}}{k_i!}$$

に従う (l はカウントされる測定値の種類である．すなわち、 $\{M_i\}_{i=1}^l$ の要素の数に対応する)．一般には総粒子数 n が不明であるので、式 (19) で考えることが本質的である．粒子数 n がポアソン分布 (18) に従うことを考慮に入れると $M = \{M_i\}$ で測定した場合、個々の測定値 i のカウント数 k_i はポアソン分布

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq k_i} \left(e^{-t} \frac{t^n}{n!} \right) \\ & \cdot \left(\frac{n!}{(n - k_i)! k_i!} (1 - \text{Tr } \rho M_i)^{n - k_i} (\text{Tr } \rho M_i)^{k_i} \right) \\ & = e^{-t(\text{Tr } \rho M_i)} \frac{(t(\text{Tr } \rho M_i))^{k_i}}{k_i!} \end{aligned} \tag{20}$$

に従い、 (k_1, \dots, k_l) はポアソン分布

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq \sum_i k_i} \left(e^{-t} \frac{t^n}{n!} \right) \prod_{i=1}^l \frac{(\text{Tr } \rho M_i)^{k_i}}{k_i!} \\ & \cdot \frac{n!}{(n - \sum_i k_i)!} \left(1 - \text{Tr } \rho \sum_i M_i\right)^{n - \sum_i k_i} \end{aligned}$$

この部分は本論文のテーマではないので、詳しく述べないが、たとえば、測定値集合が、3 次元実射影空間 $\mathbb{R}^3 / \sim \cong S^2 / \sim$ に対して、群共変的な設定でミニマックス法などを用いて議論すると正確に議論することが可能である．

$$= \prod_{i=1}^l e^{-t(\text{Tr} \rho_\theta M_i)} \frac{(t(\text{Tr} \rho_\theta M_i))^{k_i}}{k_i!} \quad (21)$$

に従う。したがって、状態族 $\{\rho_\theta | \theta \in \Theta\}$ の未知パラメータ θ を測定 $M = \{M_i\}$ を用いての推定は、かく乱母数 t を持つ確率分布族

$$\left\{ \prod_{i=1}^l e^{-t(\text{Tr} \rho_\theta M_i)} \frac{(t(\text{Tr} \rho_\theta M_i))^{k_i}}{k_i!} \middle| \theta \in \Theta, t > 0 \right\} \quad (22)$$

での θ の推定と見なすことができる。一般に用いられる最尤法を用いると、推定値 $\hat{\theta}$ は $\hat{\theta} := \text{argmax}_{\theta \in \Theta} \sum_i k_i \log \text{Tr} \rho_\theta M_i$ となり、データの経験分布が $\left\{ \frac{k_i}{k_j} \right\}$ となるときの確率分布族 $\{p_\theta | \theta \in \Theta\}$ ($p_\theta(i) := \text{Tr} \rho_\theta M_i / (\sum_j \text{Tr} \rho_\theta M_j)$) での最尤法と一致する。

特に、 $\sum_i M_i = I$ であれば、 n 個のデータのときの平均 2 乗誤差がほぼ、 $\frac{1}{J_\theta^M n} \cong \frac{1}{J_\theta^M (n+1)}$ であるので、式 (18) で平均すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-t} \frac{t^n}{n!} \frac{1}{J_\theta^M n} \cong \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t} \frac{t^n}{(n+1)!} \frac{1}{J_\theta^M} = \frac{1}{t J_\theta^M}$$

となる。また Fisher 情報量も $t J_\theta^M$ となることが確認できる。たとえば、5 章で扱った量子相関を用いない群共変的測定の場合は、Fisher 情報量は $\frac{t}{2} \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^3} \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \right)$ となり、最尤法を用いたときの平均 2 乗誤差はほぼその逆数になる。したがって、このような問題設定では、平均 2 乗誤差の t 倍、または (Fisher 情報量)/ t に注目することになる。前者は単位時間あたりの誤差で、後者は単位時間あたりの情報量とみることができる。

ここで、量子 2 準位系の固有値推定で 6 章で議論した $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$ での測定 $\{P_a, P_s\}$ を、この議論に適用してみよう。この場合、最も実験が容易なのは、片方の空間のみ粒子が検出できる測定である。たとえば、空間 \mathcal{H}_a に来た粒子を確率 α_a で検出する測定器は $\{\alpha_a P_a\}$ で記述され、 k 個の粒子を検出する確率は、

$$e^{-t\alpha_a \frac{1-r^2}{4}} \frac{\left(t\alpha_a \frac{1-r^2}{4} \right)^k}{k!}$$

で与えられる。なお、確率 α_a は量子効率とよばれ、量子光学系での実験でその性能を論じる際に重要なパラメータとなる。したがって、最尤推定量は式

$$k = t\alpha_a \frac{1 - \hat{r}_{ML}^2}{4}$$

を解くことで、 $\hat{r}_{ML} = \sqrt{1 - \frac{4k}{t\alpha_a}}$ となる。もちろん、ここでは t, α_a は既知である必要がある。そのときの Fisher 情報量は $\frac{t\alpha_a r^2}{1-r^2}$ となり、平均 2 乗誤差はほぼその逆数の $\frac{1-r^2}{t\alpha_a r^2}$ になる。

同様に、空間 \mathcal{H}_s に来た粒子を確率 (量子効率) α_s で検出する測定器であれば $\{\alpha_s P_s\}$ で記述され、 k 個の粒子を検出する確率は、

$$e^{-t\alpha_s \frac{3+r^2}{4}} \frac{\left(t\alpha_s \frac{3+r^2}{4} \right)^k}{k!}$$

で与えられる。したがって、最尤推定量は式

$$k = t\alpha_s \frac{3 + \hat{r}_{ML}^2}{4}$$

を解くことで、 $\hat{r}_{ML} = \sqrt{3 + \frac{4k}{t\alpha_s}}$ となる。もちろん、ここでも t, α_s は既知である必要がある。そのときの Fisher 情報量は $\frac{t\alpha_s r^2}{3+r^2}$ となり、平均 2 乗誤差はほぼその逆数の $\frac{3+r^2}{t\alpha_s r^2}$ になる。したがって、 $\alpha_s = \alpha_a$ であれば、測定 $\{\alpha_a P_a\}$ の方が優れていることになる。一般に測定 $\{\alpha_a P_a, \alpha_s P_s\}$ を用いた場合は、その Fisher 情報量は $\frac{t\alpha_a r^2}{1-r^2} + \frac{t\alpha_s r^2}{3+r^2}$ となり、平均 2 乗誤差はほぼ、その逆数になる。

たとえば、測定 $\{0.5 P_a\}$ を用いた場合 (以下 M'_1 と記す) と、5 章で扱った量子相関を用いない共変的測定を完全に行った場合 (以下 M_0 と記す) を比較しよう。そのためには、両者の Fisher 情報量 $\frac{0.5r^2}{1-r^2}$ と $2J_{r,\theta;r}^{M_{opt}} = \left(-\frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^3} \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \right)$ を比較することになる。これを図 2 に示した。ここでも図 1 と同様に、 r が 1 に近い場合は無限大になるので、これらに $1-r$ をかけたものをグラフに表した。この場合、 $r \geq 0.85$ のとき、 M'_1 の方が優れている。

量子効率 $\alpha_a = 0.5$ という数字は決して不可能な

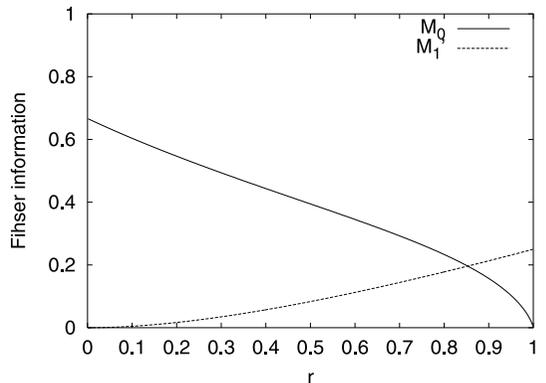


図 2 Fisher 情報量についての M_0 と M'_1 比較
Fig. 2 Fisher informations of M_0 and M'_1 .

数字ではないことを考えると、この実験は十分可能であると考えられる。事実、すでに Hendrych ら¹⁰⁾ によって測定 $\{\alpha P_a, \alpha P_s\}$ を用いて固有値を推定する実験はなされている。しかし、彼らの実験では、このような測定でも固有値が推定可能であるということに主眼が置かれており、どの程度の精度が保証される推定であるかは十分には議論されていない。もちろん、本論文で述べたような量子相関を用いることのメリットもまったく議論されていない。今後、この測定を実現することで、量子相関を用いることにより、用いない場合よりも、推定精度が向上することが実証されることが期待される。

9. 結 論

本研究では、量子 2 準位系での密度行列の固有値および固有ベクトルが未知であるとの仮定の下で、固有値のみ推定する問題を扱った。その結果、量子相関を用いない場合の推定限界を緻密に評価し、量子効果が表れる推定が現実の実験で実現可能であることを述べた。

具体的には、2 つのサンプル系の間相関のみ許す設定で $M_0, M_1, M_2, M_3, M_5, M'_1$ の 6 種の測定について比較検討を行った（本文中で M_4 が定義されているが本質的には M_2 と同じであり、 M_5 を定義するために便宜的に本文中で定義されたものである）。ここで M_0 は 1 つのサンプル系に対して、最適な測定を繰り返した場合である。一方、 M_1 は 2 つの量子系にまたがる測定の中で比較的实现が容易なもので、測定値が 2 値であるというのが特徴である。これは他の M_2, M_3, M_5 よりも実現が容易なものである。この測定値が 2 値であるという特徴はきわめて有効な特徴で、 M_0 の測定値が連続値であるため、 M_0 よりも場合によっては実現が容易であるかもしれない。さらに、 M_5 は M_1 よりも実現が困難であるものの、 M_2, M_3 よりも実現が容易であるものである。一方、 M_2, M_3 はその実現の手法さえ見当がつかないがものであり、おそらく、かなり実現は難しいと思われる。一方、8 章では量子光学系でこれらの測定を実現するための枠組みを論じた。そこでは、量子効率 α_a が問題になるが、これが 50% である場合の M_1 を M'_1 として M_0 と比較した。したがってこれらの議論をまとめると、実現の難易度は

$$M_0 < M'_1 < M_1 < M_5 < M_2, M_3$$

と表される。

そして、図 2 で示されているように、未知状態が純粋状態に近い場合では量子効率が 50% である M'_1 で

あっても、 M_0 の性能を上回ることを示した。これと同種の実験は Hendrych ら¹⁰⁾ によってなされているが、彼らの実験では、単純に M'_1 のような 2 値測定で固有値の推定が可能であることを実証したにすぎず、推定精度の向上についてはまったく触れていない。それゆえ、 M'_1 に対応する実験を行い量子相関を用いることで推定精度が向上することを、実験的に確認する研究が望まれる。本論文を読んだ読者のうち、1 人でも多くの方が、このような実験に興味を持ち、推定においても量子効果が実証されることを期待する。

なお、本研究では残念ながら 2 つのサンプル系にまたがる測定を行った場合での共変的測定の枠組みで Fisher 情報量を最適化ができなかった。これについては、今後の研究課題である。

謝辞 東京工業大学の宇佐見康二氏には文献 10) をご教示いただくとともに、有益なコメントをいただきました。また、研究を進めるうえで、今井量子計算機構プロジェクトの今井浩教授およびメンバの皆様には大変お世話になりました。同時に、査読者の方には改訂のために有益な助言などをいただきました。

参 考 文 献

- 1) Helstrom, C.W.: Minimum Mean-Square Error Estimation in Quantum Statistics, *Phys. Lett. A*, 25, pp.101–102 (1967).
- 2) Helstrom, C.W.: *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, New York (1976).
- 3) Holevo, A.S.: *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, Amsterdam, North-Holland (1982).
- 4) Hayashi, M.(Ed.): *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference*, World Scientific, Singapore, (2005).
- 5) Nagaoka, H.: A new approach to Cramér-Rao bounds for quantum state estimation, *IEICE Technical Report*, 89, 228, IT 89-42, pp.9–14 (1989); In *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference*, Hayashi, M. (Ed.), pp.100–112, World Scientific, Singapore (2005).
- 6) 林 正人, 松本啓史: 量子系における統計的推測の最近の発展, 日本応用数理学会誌, Vol.11, No.3, pp.27–48 (Sep. 2001).
- 7) 林 正人, 量子情報理論入門, SGC-ライブラリ, サイエンス社 (2004).
- 8) Keyl, K. and Werner, R.F.: *Phys. Rev. A*, 64, 052311 (2001); In *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference*, Hayashi, M. (Ed.), pp.458–467, World Scientific, Singapore (2005).
- 9) Nagaoka, H.: On the Parameter Estimation

- Problem for Quantum Statistical Models, 第12 回情報理論とその応用学会シンポジウム予稿集, pp.577–582 (1989); In *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference*, Hayashi, M. (Ed.), pp.125–132, World Scientific, Singapore (2005).
- 10) Hendrych, M., Dusek, M., Filip, R. and Fiurasek, J.: Simple optical measurement of the overlap and fidelity of quantum states: An experiment, *Phys. Lett. A*, 310, p.95 (2003).
- 11) 長岡浩司: Kullback divergence と Fisher information の関係について—古典系から量子系へ, 第15 回情報理論とその応用シンポジウム予稿集, pp.63–72 (1992); On the Relation between Kullback Divergence and Fisher Information: From Classical Systems to Quantum Systems, (Its English translation), In *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference*, Hayashi, M. (Ed.), pp.399–419, World Scientific, Singapore (2005).
- 12) Hayashi, M.: Two quantum analogues of Fisher information from a large deviation viewpoint of quantum estimation, *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 35, pp.7689–7727 (2002); In *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference*, Hayashi, M. (Ed.), pp.420–457, World Scientific, Singapore (2005).
- 13) 松本啓史: セミナー資料 (1999).
- 14) 竹内 啓: 数理統計学, 東洋経済新報社 (1963); 竹村彰道: 数理統計学の基礎, 創文社 (1991); 野田一雄, 宮岡悦良: 数理統計学の基礎, 共立出版 (1992).
- 15) 林 正人, 松本啓史: 測定自由度をもつ統計モデルと量子力学, 数理解析研究所講究録 1055, pp.96–110 (1998); Statistical Model with measurement degree of freedom and quantum physics (Its English translation), In *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference*, Hayashi, M. (Ed.), pp.162–169, World Scientific, Singapore (2005).
- 16) Gill, R. and Massar, S.: State estimation for large ensembles, *Phys. Rev. A*, 61, 042312 (2000); In *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference*, Hayashi, M. (Ed.), pp.178–214, World Scientific, Singapore (2005).
- 17) Usami, K., Nambu, Y., Tsuda, Y., Matsumoto, K. and Nakamura, K.: A New Strategy of Quantum-State Estimation for Achieving the Cramer-Rao Bound, LANL E-print <http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/0209074> (2003); Usami, K., Nambu, Y., Tsuda, Y., Matsumoto, K. and Nakamura, K.: ‘Accuracy of quantum-state estimation utilizing Akaike’s information criterion, *Phys. Rev. A*,

68, 022314 (2003).

付 録

A.1 Jensen の不等式

正の実数から正の実数への関数 f が任意の $1 > \lambda > 0$ となる λ と $x_1 \neq x_2 > 0$ に対して,

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) > f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$$

となるとき, f は凸であるといわれる. 確率空間 Ω 上の正の実数に値を持つ確率変数 X と Ω 上の確率分布 p に対して, Jensen の不等式:

$$\int_{\Omega} f(X(\omega))p(d\omega) \geq f\left(\int_{\Omega} X(\omega)p(d\omega)\right) \quad (23)$$

が成り立つ. 特に, 等号が成立するのは X が確率 1 である一定値をとる場合に限られる.

この不等式を用いると以下の事実を示すことができる. 正定値なエルミート行列 (固有値がすべて正の実数の行列) A とノルムが 1 のベクトル v に対して,

$$\langle v|A|v \rangle^{-1} \leq \langle v|A^{-1}|v \rangle \quad (24)$$

が成り立ち, かつ, 等号が成立するのは v が A の固有ベクトルである場合に限られる.

A をスペクトル分解 $A = \sum_i a_i E_i$ とすると (a_i は固有値で E_i はそれに対応する射影), $\langle v|E_i|v \rangle$ は確率分布になる. 関数 $x \mapsto 1/x$ は凸なので, Jensen の不等式が使え,

$$\begin{aligned} \langle v|A|v \rangle^{-1} &= \left(\sum_i a_i \langle v|E_i|v \rangle \right)^{-1} \\ &\leq \sum_i a_i^{-1} \langle v|E_i|v \rangle = \langle v|A^{-1}|v \rangle \end{aligned}$$

となる. また, 上式の等号成立条件も Jensen の等号成立条件から容易に得られる.

A.2 確率分布族の推定における漸近論

2.2 節では, 推定したい未知パラメータが 1 つの場合について簡単に説明したが, これについてももう少し詳しく述べ, その後に, パラメータが複数の場合, および, 推定したいパラメータに加えて, 推定する必要のない未知パラメータがある場合の議論を簡単にまとめる¹⁴⁾.

A.2.1 未知のパラメータが 1 つの場合

確率空間 Ω 上のパラメータが 1 次元の確率分布族 $\{p_{\theta} | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ の推定量 $\hat{\theta}_n$ の推定精度を議論する場合, 平均 2 乗誤差 (MSE)

$$v_{\theta}(\hat{\theta}_n) := \int_{\Omega^n} (\hat{\theta}_n(\vec{\omega}_n) - \theta)^2 p_{\theta}^n(d\vec{\omega}_n)$$

を議論することが多い. このとき, 推定量にはしばしば不偏性条件:

$$\theta = \int_{\Omega^n} \hat{\theta}_n(\vec{\omega}_n) p_\theta^n(d\vec{\omega}_n)$$

が課される．推定量がこの不偏性条件を満たすとき，平均 2 乗誤差 $v_\theta(\hat{\theta}_n)$ について以下の Cramér-Rao 不等式：

$$v_\theta(\hat{\theta}_n) \geq \frac{J_\theta^{-1}}{n} \tag{25}$$

が成り立つ．特にすべての θ で式 (25) で等号を達成する不偏推定量は有効推定量とよばれる．

しかし，有効推定量がない場合でも，不等式 (25) に相当する不等式は成り立つ．推定量の無限列 $\{\hat{\theta}_n\}$ が真のパラメータに確率収束することに加え，この収束に関するある種の一様性を課すと，式 (25) に相当する不等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n v_\theta(\hat{\theta}_n) \geq J_\theta^{-1} \tag{26}$$

が成り立つ．特に $\hat{\theta}_n$ が最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}(\vec{\omega}_n) := \operatorname{argmax}_\theta \prod_{i=1}^n p_\theta(\omega_i)$ であるときに，不等式 (26) で等号が成り立つ．確率分布には以下に定義する Hellinger 距離

$$H(p, q) := \int_{\Omega} \left(\sqrt{p(\omega)} - \sqrt{q(\omega)} \right)^2 d\omega$$

が知られているが，以下のようにこの距離の極限として，Fisher 情報量 J_θ は特徴付けられる．

$$\frac{J_\theta}{4} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(p_\theta, p_{\theta+\epsilon})}{\epsilon^2} \tag{27}$$

さらに，確率空間 Ω から別の確率空間 Ω' への写像 f が与えられたとき， $p_\theta \circ f^{-1}$ を考えることで Ω' 上の確率分布族が得られる．この確率分布族の Fisher 情報量を J'_θ とすると，以下の Fisher 情報量に関する情報処理不等式が成立する．

$$J_\theta \geq J'_\theta \tag{28}$$

なお， Ω' が十分統計量とよばれる場合は等号が成立する．

A.2.2 推定すべきパラメータが複数ある場合

次に，多次元のパラメータを持つ確率分布族 $\{p_\theta(\omega) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d\}$ に対するパラメータ θ の推定を考える．この場合は，推定量は Ω^n (n は得られたデータの数) から Θ または \mathbb{R}^d への関数 $\hat{\theta}_n$ として与えられる．その精度を各パラメータの平均 2 乗誤差の和 $\sum_i \int_{\Omega^n} (\hat{\theta}_n^i(\vec{\omega}_n) - \theta^i)^2 p_\theta^n(d\vec{\omega}_n)$ ($p_\theta^n(d\vec{\omega}_n) := \prod_{i=1}^n p_\theta(\omega_i)$) を用いて評価することも多いが，平均 2 乗誤差行列とよばれる $d \times d$ の対称行列 $v_\theta^{i,j}(\hat{\theta}_n) := \int_{\Omega^n} (\hat{\theta}_n^i(\vec{\omega}_n) - \theta^i)(\hat{\theta}_n^j(\vec{\omega}_n) - \theta^j) p_\theta^n(d\vec{\omega}_n)$ に注目することもある．対称行列の集合は全順序ではないため，完全に優劣がつかないことも起こりかねない

いが，確率分布族のパラメータ推定についての 1 次漸近論ではそのようなことは起きず，最適値な平均 2 乗誤差行列が一意に決まる (量子状態族の場合には 1 次漸近論であっても，最適な平均 2 乗誤差行列は一意には決まらない)．パラメータが 1 つの場合と同様に，最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は $\hat{\theta}_{ML}(\vec{\omega}_n) := \operatorname{argmax}_\theta \prod_{i=1}^n p_\theta(\omega_i)$ で与えられ，以下の式が漸近的に成り立つ．

$$v_\theta^{i,j}(\hat{\theta}_n) \cong (J_\theta^{-1})^{i,j} \frac{1}{n},$$

$$(J_\theta)_{i,j} := \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta^i} \log p_\theta(\omega) \right) \times \left(\frac{\partial}{\partial \theta^j} \log p_\theta(\omega) \right) p_\theta(\omega) d\omega.$$

ここで行列 $(J_\theta)_{i,j}$ は Fisher 情報行列とよばれ，1 パラメータの場合の Fisher 情報量の代わりの役割を担う．さらに，推定量の列 $\vec{\hat{\theta}} = \{\hat{\theta}_n\}$ が収束に関するある種の一様性を満たすとすると，極限で与えられる行列 $v^{i,j}(\vec{\hat{\theta}}) := \lim_{n \rightarrow \infty} n v_\theta^{i,j}(\hat{\theta}_n)$ は

$$v^{i,j}(\vec{\hat{\theta}}) \geq (J_\theta^{-1})^{i,j}$$

を満たす．

A.2.3 攪乱変数がある場合

次に推定したいパラメータ θ の他に有限個の未知パラメータ (攪乱変数) $\phi \in \mathbb{R}^d$ がある場合について考える．以下では簡単のため推定したいパラメータの次元は 1 つとする．この場合，確率分布族 $\{p_{\theta,\phi}(\omega) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}, \phi \in \mathbb{R}^d\}$ に対するパラメータ θ の推定を考えることになる． θ についての Fisher 情報量 $J_{\theta,\phi;\theta}$ を偏微分を用いて

$$J_{\theta,\phi;\theta} := \int \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p_{\theta,\phi}(\omega) \right)^2 p_{\theta,\phi}(\omega) d\omega$$

で定義すると，任意の推定量 $\hat{\theta}_n$ は ϕ が既知の場合の ϕ に依存したパラメータが 1 つの確率分布族 $\{p_{\theta,\phi}(\omega) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ の推定量にもなるので，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n v_{\theta,\phi}(\hat{\theta}_n) \geq J_{\theta,\phi;\theta}^{-1}$$

が成り立つ．一方，確率分布族 $\{p_{\theta,\phi}(\omega) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}, \phi \in \mathbb{R}^d\}$ に対する最尤推定量 $(\hat{\theta}_{ML,n}, \hat{\phi}_{ML,n})$ を考え，それから $\hat{\phi}_{ML,n}$ を忘れ， $\hat{\theta}_{ML,n}$ のみを θ の推定量とした場合，その平均 2 乗誤差は

$$v(\hat{\theta}_{ML,n}) \cong (J_{\theta,\phi}^{-1})^{0,0}$$

で与えられる．ただし $J_{\theta,\phi}$ は θ を 0 番目の座標とする $(d+1) \times (d+1)$ の対称行列で確率分布族 $\{p_{\theta,\phi}(\omega) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}, \phi \in \mathbb{R}^d\}$ の Fisher 情報行列である．もちろん， $J_{\theta,\phi;\theta} = (J_{\theta,\phi})_{0,0}$ であるが，一般には不等式

$$J_{\theta, \phi; \theta}^{-1} \leq (J_{\theta, \phi}^{-1})^{0,0} \tag{29}$$

が成り立ち、等号が成立するのはベクトル $(1, 0, \dots, 0)^T$ が行列 $J_{\theta, \phi}$ の固有ベクトルのときのみである。この事実は式 (23) で正定値なエルミート行列 A に対し示した事実からただちに確認できる。

なお、付録 A.2.1 の式 (27) で述べたように、Fisher 情報量は Hellinger 距離の極限として特徴付けることが可能である。したがって、式 (29) で等号条件と、後に示すように

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(p_{\theta+\epsilon, \phi+\epsilon\eta}, p_{\theta, \phi})}{\epsilon^2} \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(p_{\theta-\epsilon, \phi+\epsilon\eta}, p_{\theta, \phi})}{\epsilon^2}, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^d \end{aligned} \tag{30}$$

となることが同値となる。

また、式 (29) で等号が成立しない場合、すなわち、 $(1, 0, \dots, 0)^T$ が行列 $J_{\theta, \phi}$ の固有ベクトルのときのみでない場合は、次に与える θ に対する推定量 $\hat{\theta}_{a,n}$ が限界 $J_{\theta, \phi}^{-1}$ を達成する。確率分布族 $\{p_{\theta, \phi}(\omega) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}, \phi \in \mathbb{R}^d\}$ に対する最尤推定量 $(\hat{\theta}_{ML,n}, \hat{\phi}_{ML,n})$ を考え、その推定値 $\hat{\phi}_{ML,n}$ を用いて、確率分布族 $\{p_{\theta, \hat{\phi}_{ML,n}}(\omega) | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}\}$ に対する最尤推定量で $\hat{\theta}_{a,n}$ を定義する。すると、推定量 $\hat{\theta}_{a,n}$ についての極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n v(\hat{\theta}_{a,n})$ は $J_{\theta, \phi}^{-1}$ に一致する。

式 (30) と (29) の等号成立との同値性の証明：(1, η_1, \dots, η_d) 方向の Fisher 情報量と Hellinger 距離との関係より、

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(p_{\theta+\epsilon, \phi+\epsilon\eta}, p_{\theta, \phi})}{\epsilon^2} \\ = \frac{1}{4} \left((J_{\theta, \phi})_{0,0} + \sum_k (J_{\theta, \phi})_{0,k} \eta_k + \sum_k (J_{\theta, \phi})_{k,0} \eta_k \right. \\ \left. + \sum_{k,k'} (J_{\theta, \phi})_{k,k'} \eta_k \eta_{k'} \right) \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(p_{\theta-\epsilon, \phi+\epsilon\eta}, p_{\theta, \phi})}{\epsilon^2} \\ = \frac{1}{4} \left((J_{\theta, \phi})_{0,0} - \sum_k (J_{\theta, \phi})_{0,k} \eta_k - \sum_k (J_{\theta, \phi})_{k,0} \eta_k \right. \\ \left. + \sum_{k,k'} (J_{\theta, \phi})_{k,k'} \eta_k \eta_{k'} \right) \end{aligned}$$

となる。よって式 (30) は

$$0 = \sum_k ((J_{\theta, \phi})_{k,0} + (J_{\theta, \phi})_{0,k}) \eta_k$$

と同値である。 η は任意であり、 $J_{\theta, \phi}$ は対称行列であるので、式 (30) は各成分 $(J_{\theta, \phi})_{k,0}$ が 0 になることと同値である。よって、同値性が確認できた。

A.3 群対称性と群不変なパラメータについての Fisher 情報量の最大化

本文で扱った密度行列の固有値推定では攪乱変数が群の作用に関して共变的であり、推定すべきパラメータが群の作用に関して不変である。ここでは、攪乱変数が群の作用に関して共变的であり、1つの推定すべきパラメータが不変である場合での一般論を取り扱う。初めに、A.3.1 では問題を数学的に定式化し、A.2.3 の議論をこの場合に適用することで比較的容易に確認できることを要約する。そして、A.3.2 では、Holevo は群共变的モデルの推定論と類似の議論を Fisher 情報量の最適化問題に適用する。その結果、ミニマックス、Bayes 双方の設定で漸近的な推定精度の最適化問題が群共变的な測定についての Fisher 情報量の最適化問題に帰着できるが得られる。そして、A.3.3 では、表現の規約性などを用いて、群共变的な測定についての Fisher 情報量の最適化問題をより単純な構造に帰着させる。この問題の単純化はきわめて有効で本文ではこの単純化を用いて個別の漸近的な推定精度の最適化問題が解かれている。

なお、ここで得られた結論は Holevo³⁾ が群共变的モデルの推定誤差に関する議論で得た結論ときわめて類似している。しかし、彼が扱った問題とここで扱った問題とは異なっており、彼の議論をもとにここで扱った問題を定式化し、それをここで扱う問題に拡張することは決して自明ではない。ここでの議論のポイントは、直接平均 2 乗誤差に対して、Holevo のテクニックを適用せず、平均 2 乗誤差と Fisher 情報量との関連を調べたうえで、Fisher 情報量に対して、Holevo のテクニックを適用した点にある。そのため、付録 A.3.2 での部分は Holevo のものと類似しているが、最終的な結論を導くには Holevo が扱った設定ではなかった議論が必要となる。たとえば、付録 A.3.1 での Fisher 情報量と漸近的な誤差を結び付ける議論や付録 A.3.3 での不変部分群に関する議論などがあげられる。特に Holevo の設定では測定値の集合があらかじめ固定された設定であったが、ここで扱っている設定では Fisher 情報量に注目しているので、測定値集合があらかじめ固定されていない。以下で述べる議論は、結果的に Holevo のオリジナルの議論よりも複雑なものになってしまったが、その原因の一端は測定値集合の取扱いの差にあると思われる。

A.3.1 Fisher 情報量と最尤推定量

今、2つのパラメータ $r \in \mathbb{R}$ と $\theta \in \Theta$ を考え、コンパクトなパラメータ空間 Θ にはコンパクトな群 G が推移的に作用しているとする。すなわち、群 G の Θ へ

の作用を f としたとき、任意の $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ に対して、 $\theta_2 = f(g)\theta_1$ となる $g \in G$ が存在する。さらに、群不変な距離 d 、すなわち、任意の $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ と $g \in G$ に対して、 $d(\theta_1, \theta_2) = d(f(g)\theta_1, f(g)\theta_2)$ となる距離が存在し、加えて、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \Theta$ が $d(\theta_1, \theta_2) = d(\theta_1, \theta_3)$ となるとき、 $f(g)\theta_1 = \theta_1, f(g)\theta_2 = \theta_3$ となる $g \in G$ がとれるとする。この作用の下で不変な Θ 上の確率測度を $\mu(d\theta)$ で表し、群 G の不変測度を $\nu(dg)$ で表すことにする。それぞれコンパクトであるので右不変確率測度と左不変確率測度は一致する。

以下、群 G の Hilbert 空間 \mathcal{H} への表現 V が与えられており、 \mathcal{H} 上の状態族 $\{\rho_{r,\theta} | r \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta\}$ が以下の条件を満たす場合を考える。

$$V_g \rho_{r,\theta} V_g^\dagger = \rho_{r,f(g)\theta}, \quad \forall g \in G.$$

Ω に測定値を持つ測定 M に対して、測定 M_g を

$$M_g(d\omega) := V_g^\dagger M(d\omega) V_g$$

で定義する。特に、空間 Ω に群 G が推移的に作用し、その作用が f_Ω で書ける場合、 Ω に測定値を持つ測定 M が以下の条件を満たすとき、共変的とよぶことにする³⁾。

$$M_g(d\omega) = M(f_\Omega(g)\omega)$$

Ω は必ずしも Θ とは一致しない。

以下、群の作用と Fisher 情報量との関係について簡単にまとめる。 $J_{r,\theta;r}^M$ は r についての Fisher 情報量とする。付録 A.2.1 の議論から、測定 M を用いて推定する場合、収束に関する一様性を満たす推定量 \hat{r}_n を用いると仮定すると、その平均 2 乗誤差は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \nu_{r,\theta}(M \times n, \hat{r}_n) \geq (J_{r,\theta;r}^M)^{-1} \quad (31)$$

となる。

補題 1 測定 M が共変的であるとき、 (r, θ) の最尤推定量を $(\hat{r}_{ML,n}, \hat{\theta}_{ML,n})$ としたとき、 r の推定量である $\hat{r}_{ML,n}$ は式 (31) で等号が成立する。

証明 以下、 (r_0, θ_0) での Fisher 情報行列について議論するので、 θ_0 の自然な座標を用いて議論することとする。すなわち、その座標の下では (r_0, θ_0) の近傍では

$$d(\theta_0, \theta + \eta) = d(\theta_0, \theta - \eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^d$$

とする (d は Θ の次元とする)。ここで、 $J_{r,\theta;r}^M$ は r についての Fisher 情報量なので θ の座標のとり方に依存しないことに注意されたい。ここで、Hellinger 距離 $H(\cdot, \cdot)$ を用いると、このとき付録 A.2.3 の議論より、上記の方法で構成した推定量 $\hat{r}_{ML,n}$ が式 (31) で

等号が成立するための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(P_{r_0+\epsilon, \theta_0+\epsilon\eta}^M, P_{r_0, \theta_0}^M)}{\epsilon^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(P_{r_0-\epsilon, \theta_0+\epsilon\eta}^M, P_{r_0, \theta_0}^M)}{\epsilon^2} \end{aligned} \quad (32)$$

で表すことができる。

ところで、 $\text{Tr} \rho_{r,f(g)\theta} M(d\omega) = \text{Tr} \rho_{r,\theta} V_g^\dagger M(d\omega) V_g = \text{Tr} \rho_{r,\theta} M_g(d\omega)$ となるので、 $\omega_0 := f_\Omega(g)\omega$ とすると、

$$P_{r,\theta}^{M_g}(d\omega) = P_{r,f(g)\theta}^M(d\omega_0) \quad (33)$$

を得る。

M が共変的であるとき、 $f(g)\theta_1 = \theta_1, f(g)\theta_2 = \theta_3, g \in G$ とすると、

$$\begin{aligned} H(P_{r_1, \theta_1}^M, P_{r_2, \theta_2}^M) &= H(P_{r_1, f(g)\theta_1}^M, P_{r_2, f(g)\theta_2}^M) \\ &= H(P_{r_1, \theta_1}^M, P_{r_2, \theta_3}^M) \end{aligned}$$

となる。したがって、式 (32) が得られ、補題を得る。 ■

ここで、以下の議論に必要な性質をまとめておく、測定 M_g を不変測度 $\nu(dg)$ で disjoint に重ね合わせた測定 \overline{M} を考えると $\int_G J_{r,\theta;r}^{M_g} \nu(dg) = J_{r,\theta;r}^{\overline{M}}$ が成り立ち、測定 \overline{M} は共変的になる。なお測定 M の測定値の集合を Ω としたとき、測定 \overline{M} は測定値の集合を $G \times \Omega$ 持つ POVM で

$$\overline{M}(dg, d\omega) = \nu(dg) M(d\omega)$$

で定義される。また、式 (33) より、

$$J_{r,\theta;r}^{M_g} = J_{r,f(g)\theta;r}^M \quad (34)$$

が成り立つ。

A.3.2 ミニマックス法と Bayes 法

ここでの設定では、攪乱変数が未知であるので、未知な攪乱変数についてある意味で一様な推定精度を保証する必要がある。数理統計学では推定誤差を最小化するために、すべての点での誤差を同時に最小化することができないので、未知のパラメータがどの値であってもそれなりに有効に働く推定を導出する枠組みとして、ミニマックス法とよばれるものと Bayes 法とよばれるものが知られている。5 章でも述べたように、Bayes 法では未知パラメータに事前分布を仮定し、その事前分布についての平均値に注目するという方法である。一方、ミニマックス法では、その注目する未知パラメータについて最悪の場合に注目する。なお、統計学で普通に用いられる場合では推定すべき未知パラメータについて平均化する Bayes 法や最悪のケースを考慮するミニマックス法が採用される。しかし、こ

ここで用いる Bayes 法では攪乱変数について平均化している。同様にミニマックス法では攪乱変数について最悪の場合を考慮することになる。それゆえ、通常と異なるので注意が必要である。

なお、一般に確率分布族のパラメータ推定では漸近的設定では、ミニマックス法、Bayes 法をあえて採用しなくても Fisher 情報量で最適な推定精度を導くことができる。これは漸近論では局所的な設定に帰着できるからである。今考えている設定は、攪乱変数があり、最適な測定が攪乱変数に依存しているという状況であるので、このような状況では、攪乱変数に関して、Bayes 法やミニマックス法を用いることは漸近論の枠組みでも有効である。

以下、 r, θ が未知で r のみを推定する問題を考えることにする。すると、ミニマックス法では $\lim_{n \rightarrow \infty} n, \max_{\theta \in \Theta} v_{r,\theta}(M \times n, \hat{r}_n)$ を、Bayes 法では $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\Theta} v_{r,\theta}(M \times n, \hat{r}_n) \mu(d\theta)$ をそれぞれ最小化することになる。

そして、収束に関する一様性を満たす推定量 \hat{r}_n を用いると仮定すると、その平均 2 乗誤差は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n v_{r,\theta}(M \times n, \hat{r}_n) \geq (J_{r,\theta;r}^M)^{-1} \quad (35)$$

となり、 \hat{r}_n が最尤推定量のとき等号が成立する ($J_{r,\theta;r}^M$ は r についての Fisher 情報量)。それゆえ、ミニマックス法では $\min_{\theta} J_{r,\theta;r}^M$ を最大にする M をみつけることが問題となる。このとき

$$\begin{aligned} \min_{\theta} J_{r,\theta;r}^M &\leq \int_{\Theta} J_{r,\theta;r}^M \mu(d\theta) = \int_G J_{r,f(g)\theta;r}^M \nu(dg) \\ &= \int_{\Theta} J_{r,\theta;r}^{M_g} \mu(d\theta) = \bar{J}_{r,\theta;r}^M \end{aligned}$$

となり、 \bar{M} は共変的であるので、

$$\max_M \min_{\theta} J_{r,\theta;r}^M = \max_{M:\text{cov}} J_{r,\theta;r}^M \quad (36)$$

となる (ここで cov は群共変的測定を表し、 $\max_{M:\text{cov}}$ は群共変的測定について最大化をとることを意味する)。一方、群 G のパラメータ空間 Θ への作用の推移性と式 (34) より、

$$\min_{\theta} J_{r,\theta;r}^M = \int_{\Theta} J_{r,\theta_0;r}^M \mu(d\theta) = J_{r,\theta_0;r}^M$$

となり、式 (36) で等式が成立し、

$$\begin{aligned} \max_M \min_{\theta} J_{r,\theta;r}^M &= \max_M \int_{\Theta} J_{r,\theta;r}^M \mu(d\theta) \\ &= \max_{M:\text{cov}} J_{r,\theta;r}^M \end{aligned} \quad (37)$$

が成り立つ。すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \max_{\theta \in \Theta} v_{r,\theta}(M \times n, \hat{r}_n) = \left(\max_{M:\text{cov}} J_{r,\theta;r}^M \right)^{-1}$$

が成り立つ。

一方 Bayes 法では $\int_{\Theta} (J_{r,\theta;r}^M)^{-1} \mu(d\theta)$ を最小化することになる。関数 $x \mapsto 1/x$ が下に凸であることに注目し Jensen の不等式 (23) を用いると、

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} (J_{r,\theta}^M)^{-1} \mu(d\theta) &\geq \left(\int_{\Theta} J_{r,\theta}^M \mu(d\theta) \right)^{-1} \\ &= \left(\bar{J}_{r,\theta;r}^M \right)^{-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 \bar{M} が共変的であることから、

$$\min_M \int_{\Theta} (J_{r,\theta}^M)^{-1} \mu(d\theta) = \min_{M:\text{cov}} (J_{r,\theta;r}^M)^{-1} \quad (38)$$

が成り立つ。そして、 M が共変的であるとすると、 $J_{r,\theta}^M$ は θ に依存しないので、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\Theta} v_{r,\theta}(M \times n, \hat{r}_n) \mu(d\theta) \\ = \left(\max_{M:\text{cov}} J_{r,\theta;r}^M \right)^{-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。これらの議論から、どちらの問題設定を採用しても、群共変的な測定についての Fisher 情報量の最大化問題 $\max_{M:\text{cov}} J_{r,\theta;r}^M$ に帰着される。

A.3.3 既約性と既約分解を用いた Fisher 情報量の最大化

次に、Fisher 情報量の最適化問題を表現の構造を用いて単純化する問題を考える。最初に、簡単な場合として V_g が既約である場合について考える。この場合、 \mathcal{H} 上の状態 ρ を用いて測定値集合を G に持つ共変的な測定 M^{ρ} を以下で構成する。

$$M^{\rho}(dg) := (\dim \mathcal{H}) V_g \rho V_g^{\dagger} \nu(dg).$$

すると、このとき、

$$\begin{aligned} V_{g_0}(\dim \mathcal{H}) \int_G V_g \rho V_g^{\dagger} \nu(dg) \\ = (\dim \mathcal{H}) \int_G V_{g_0 g} \rho V_g^{\dagger} \nu(dg) \\ = (\dim \mathcal{H}) \int_G V_g \rho V_{g_0^{-1}g}^{\dagger} \nu(dg) \\ = (\dim \mathcal{H}) \int_G V_g \rho V_g^{\dagger} \nu(dg) V_{g_0} \end{aligned}$$

となるので、表現の既約性から $(\dim \mathcal{H}) \int_G V_g \rho V_g^{\dagger} \nu(dg)$ は定数になる。さらにそのトレースは

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\dim \mathcal{H}) \int_G V_g \rho V_g^{\dagger} \nu(dg) \\ = (\dim \mathcal{H}) \int_G \nu(dg) = \dim \mathcal{H} \end{aligned}$$

となることから, $V_{g_0}(\dim \mathcal{H}) \int_G V_g \rho V_g^\dagger \nu(dg)$ は単位行列になり, M^ρ は POVM となる. すると, 後に示すように,

$$\max_{M:\text{cov}} J_{r,\theta;r}^M = \max_{\rho:\text{pure}} J_{r,\theta;r}^{M^\rho} \quad (39)$$

が成り立つ. それゆえ, 表現が \mathcal{H} 上の純粋状態の集合に推移的に作用するときには, ρ が純粋状態である限り, $J_{r,\theta;r}^{M^\rho}$ は ρ の取り方に依存しない. もちろん r にも依存しない. たとえば, $SU(2)$ が \mathbb{C}^2 に作用する場合はあげられ, この場合にこの議論を適用すると式 (7) が得られる.

定義より式 (39) の \geq は自明であるので, \leq を示す. そのためには, 任意の群共変的測定 M について

$$J_{r,\theta;r}^M \leq \max_{\rho:\text{pure}} J_{r,\theta;r}^{M^\rho} \quad (40)$$

を示すと十分である.

初めに, ρ が純粋状態とは限らない混合状態である場合に式 (40) を示す. そのために, $\rho = \sum_i \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ とスペクトル分解する. すると $M^\rho = \sum_i \lambda_i M^{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|}$ となり, 情報処理不等式 (28) より

$$J_{r,\theta}^{M^\rho} \leq \sum_i \lambda_i J_{r,\theta}^{M^{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|}}$$

となる. なお ρ を動かさない $g \in G$ の集合は群であり, 不変部分群とよばれ, 以下 H と記すことにする. すると, M^ρ の測定値集合は等質空間 G/H になる.

次に, M が状態 ρ を用いて必ずしも M^ρ と書けない場合について式 (40) を示す. この場合 Ω 上の確率測度 μ_Ω を

$$\mu_\Omega(d\omega) := \frac{1}{\dim \mathcal{H}} \text{Tr} M(d\omega)$$

で定義し, 状態 $\rho(\omega)$ を

$$(\dim \mathcal{H})\rho(\omega)\mu_\Omega(d\omega) = M(d\omega)$$

で定義する. すなわち, $\rho(\omega)$ は ‘微分’ $\frac{1}{\dim \mathcal{H}} \frac{M(d\omega)}{\mu_\Omega(d\omega)}$ ととらえることもできる. そして Ω を群 G の作用で割った空間を X とし, μ_Ω から自然に定義される X 上の確率測度を μ_X とする. このとき, $x = [\omega] \in X$ に対して, POVM $M^x := M^{\rho(\omega)}$ を定義すると代表元 ω のとり方に依存せずに M^x が決まる. さらに群作用に関して閉じた空間 $\{\omega | x = [\omega]\}$ を考え, その要素を ω_x とし, 任意の ω は (x, ω_x) と記述できる. したがって, M が共変的であることから,

$$M(x, \omega_x) = M^x(\omega)\mu_X(dx)$$

が成立する. すなわち, M は測定 M^x を確率 $\mu_X(dx)$ で行ったものとして考えることができる. よって, 同様に情報処理不等式 (28) を用いることで

$$J_{r,\theta}^{M^\rho} \leq \int_X J_{r,\theta}^{M^x} \mu_X(dx)$$

が成り立つ. したがって, 式 (40) が成り立ち, 式 (39) が成り立つ.

なお, 複数の共変的 POVM M_i があり, その disjoint な和で表される POVM $M := \coprod_i \lambda_i M_i$ については

$$J_{r,\theta}^M = \sum_i \lambda_i J_{r,\theta}^{M_i} \quad (41)$$

が成り立つ.

次に, 群 G の \mathcal{H} への表現 V_g が有限個の既約表現の直和 $\mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_l$ に分解できるとし, 各直和成分 \mathcal{H}_i への射影を P_i とする. さらに, 各状態 $\rho_{r,\theta}$ は P_i と可換とする. このとき, $\{P_i\}$ は POVM になる. ここで測定値を集合 Ω_i にとる \mathcal{H}_i 上の測定 M_i を考え, これらの直和 $\oplus_i M_i$ を \mathcal{H} 上の測定値を集合 $\coprod_i \Omega_i$ にとる測定として以下で定義する. 各 Ω_i に対してその Borel 集合 B_i を選ぶと, $\coprod B_i$ は $\coprod_i \Omega_i$ の Borel 集合になり, 直和 $\oplus_i M_i$ を

$$\left(\bigoplus_i M_i\right)\left(\prod_j B_j\right) := \bigoplus_i (M_i(B_i))$$

を満たすものとして定義する. このとき, 以下に示すように

$$\begin{aligned} \max_{M:\text{cov}} J_{r,\theta;r}^M &= \max_{M_i:\text{cov on } \mathcal{H}_i} J_{r,\theta;r}^{\oplus_i M_i} \\ &= \max_{\rho_i:\text{pure on } \mathcal{H}_i} J_{r,\theta;r}^{\oplus_i M_i^{\rho_i}} \end{aligned} \quad (42)$$

が成り立つ. これにより, 上記の仮定の下では群共変的な測定で Fisher 情報量を最大化する問題は, 個々の既約成分で独立に純粋状態 ρ_i を変数とする最大化問題を解くことに帰着されることが分かった. このことは, 問題の取扱いを著しく容易にする.

以下, 式 (42) を示す. M を \mathcal{H} 上の共変的な POVM とすると, P_i と $\rho_{r,\theta}$ は可換であり, $\sum_i P_i = I$ となることから

$$\text{Tr} M(B)\rho_{r,\theta} = \sum_i \text{Tr} P_i M(B)P_i \rho_{r,\theta}$$

となる. M_i を \mathcal{H}_i 上の POVM として, $M_i(B) := P_i M(B)P_i$ と定義すると, Fisher 情報量の単調性 (4) より,

$$J_{r,\theta;r}^M \leq J_{r,\theta;r}^{\oplus_i M_i}$$

となる. 最後に式 (39) の導出と同様の議論を用いることにより式 (42) を得る.

A.4 式 (17) の証明

$\log (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger \operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{2, k} g^\dagger)$
 $= \log (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger) + \log (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{2, k} g^\dagger)$ である
 から,

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} \left(\frac{d \log (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger \operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{2, k} g^\dagger)}{d r} \right)^2$$

$$\times (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger \operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{2, k} g^\dagger) \nu(d g)$$

$$= \int_{\mathrm{SU}(2)} \left(\frac{d \log (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger)}{d r} \right)^2$$

$$\times (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger \operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{2, k} g^\dagger) \nu(d g)$$

$$+ \int_{\mathrm{SU}(2)} \left(\frac{d \log (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{2, k} g^\dagger)}{d r} \right)^2$$

$$\times (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger \operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{2, k} g^\dagger) \nu(d g)$$

$$+ 2 \int_{\mathrm{SU}(2)} \left(\frac{d \log (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger)}{d r} \right)$$

$$\times \left(\frac{d \log (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{2, k} g^\dagger)}{d r} \right)$$

$$\times (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger \operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{2, k} g^\dagger) \nu(d g)$$

となる. ρ_1 と ρ_2 はともに純粋状態であるので右辺の
 第 1 項と第 2 項は一致する. よって, 第 1 項と第 3 項

のみ計算すれば十分である. $\rho_{1, k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho_{2, k} =$

$$\begin{pmatrix} \beta_k & \sqrt{\beta_k(1-\beta_k)} e^{-i a} \\ \sqrt{\beta_k(1-\beta_k)} e^{i a} & 1-\beta_k \end{pmatrix}$$
 と書ける

$$\text{ときは } g_{\theta, \phi, \psi} = \begin{pmatrix} e^{i \phi} & 0 \\ 0 & e^{-i \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{i \psi} & 0 \\ 0 & e^{-i \psi} \end{pmatrix}, 0 \leq \psi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi / 2, 0 \leq \phi \leq \pi$$

とすると,

$$\operatorname{Tr} g_{\theta, \phi, \psi} \rho_{1, k} g_{\theta, \phi, \psi}^\dagger \rho_{r, 0}$$

$$= \frac{1}{2}(1+r \cos 2 \theta)$$

$$\operatorname{Tr} g_{\theta, \phi, \psi} \rho_{2, k} g_{\theta, \phi, \psi}^\dagger \rho_{r, 0}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+r\left(\cos 2 \theta\left(2 \beta_k-1\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+2 \sqrt{\beta_k\left(1-\beta_k\right)} \sin 2 \theta \cos 2(\psi+a)\right)\right)$$

となる. また不変測度 ν は $\frac{1}{\pi^2} \sin 2 \theta d \phi d \theta d \psi$ で与え
 られる. したがって,

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} \left(\frac{d \log (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger)}{d r} \right)^2$$

$$\times (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger \operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{2, k} g^\dagger) \nu(d g)$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 \pi} \left(\frac{\cos 2 \theta}{1+r \cos 2 \theta} \right)^2 (1+r \cos 2 \theta),$$

$$\left(1+r\left(\cos 2 \theta\left(2 \beta_k-1\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+2 \sqrt{\beta_k\left(1-\beta_k\right)} \sin 2 \theta \cos 2(\psi+a)\right)\right)$$

$$\times \sin 2 \theta d \theta d \psi$$

$$= \frac{2 \beta_k-1}{12} + \frac{\beta_k-1}{2 r^2} + \frac{1-\beta_k}{4 r^3} \log \left(\frac{1+r}{1-r}\right),$$

$$\int_{\mathrm{SU}(2)} \left(\frac{d \log (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger)}{d r} \right)$$

$$\times \left(\frac{d \log (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{2, k} g^\dagger)}{d r} \right)$$

$$\times (\operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{1, k} g^\dagger \operatorname{Tr} \rho_{r, \theta} g \rho_{2, k} g^\dagger) \nu(d g)$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 \pi} (\cos 2 \theta) \left(\cos 2 \theta\left(2 \beta_k-1\right)\right.$$

$$\left.+2 \sqrt{\beta_k\left(1-\beta_k\right)} \sin 2 \theta \cos 2(\psi+a)\right)$$

$$\times \sin 2 \theta d \theta d \psi$$

$$= \frac{2 \beta_k-1}{12}$$

となり, 式 (17) を得る.

(平成 17 年 2 月 8 日受付)

(平成 17 年 7 月 4 日採録)



林 正人 (正会員)

昭和 46 年生. 平成 10 年日本学術
 振興会特別研究員. 平成 11 年京都
 大学大学院理学研究科数学数理解析
 専攻(数学系) 博士後期課程修了.

平成 12 年理化学研究所脳科学総合
 研究センター脳数理研究チーム研究員. 平成 15 年科
 学技術振興事業団 ERATO 今井量子計算機構プロジェ
 クト技術参事. 平成 16 年東京大学大学院情報理工学
 系研究科 21 世紀 COE「情報科学技術戦略コア」超口
 バスト計算原理プロジェクト特任助教授(兼務). 量
 子情報理論, 量子推定理論の研究に従事. 理学博士.
 著書に『量子情報理論入門』(サイエンス社, SGC-ラ
 イブラリ), 編集に『Asymptotic Theory of Quan-
 tum Statistical Inference』(World Scientific). 平成
 14 年 SITA 奨励賞受賞. 日本数学会, 情報理論とそ
 の応用学会各会員. International Journal of Quantum
 Information (World Scientific) の Editorial Bord.