3B-8

分散制約最適化問題における近似解法を使った最適解の推定

飯塚　泰樹
東海大学理学部情報数理学科

1　はじめに

分散制約最適化問題 (DCOP: Distributed Constraint Optimization Problem) は，分散環境における問題解決の基本的枠組みの 1 つとして近年注目を集めている．DCOP の解法として，いくつかのアルゴリズムが提案されている．DCOP を用いて実世界の問題を扱うためには，より高速な近似アルゴリズムが求められる．本研究は，近似アルゴリズムの効率を上げることを目指すものである．近似アルゴリズムは計算時間が短いが，最適解を求めることは保証できない．

本稿では近似アルゴリズムを複数回実行した時に最適解が得られる確率を最適解到達率と呼ぶ．筆者らは DCOP の近似アルゴリズムを多重実行することで，アルゴリズムの最適解到達率を上げる方法を提案した [3]．また，近似アルゴリズムを使って最適解を得るために必要な多重度についても報告を行った [4]．

本稿では，多重化前のアルゴリズムの最適解到達率が正確に判明していないという条件において，多重化アルゴリズムが導き出した解が最適解かどうかを判定する方法を検討する．

2　分散制約最適化問題 (DCOP)

分散制約最適化問題 (Distributed Constraint Optimization Problem: DCOP) は 4 つ組 $< A, X, D, F >$ として定義されている [1][2]．変数の集合 $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$，変数のそれぞれが値を取る有限で離散的な領域 $D = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ があり，それぞれの変数はエージェント $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ に割当てられている．変数間，x_i と x_j の間にはコスト関数 $F = \{f_{ij}|D_i \times D_j \to \mathbb{R}\}$ が与えられている．エージェント a_k は自分が持つ変数 x_k，x_k に関係するコスト関数 g_{ij} に関する情報だけを持つ．この時，DCOP の目的はコスト関数の総和 $G(\mathcal{A}) = \sum g_{ij}(\mathcal{A})$ を最小化する変数の割当て $\mathcal{A}$ を求めることである．DCOP では，変数が制約で結ばれたエージェント間で，変数の値をメッセージ通信で交換しながら問題を解く．

DCOP において，すべての割当て $\mathcal{A}$ の中で最小の $G(\mathcal{A}_o)$ を与える割当て $\mathcal{A}_o$ を最適解と呼ぶ．分散近似アルゴリズムを n 回実行した時に，最適解が得られた回数を n_{opt} 回とした時，本稿では，$P_{opt} = n_{opt}/n$ を，そのアルゴリズムの最適解到達率と呼ぶことにする．

3　アルゴリズムの多重実行

3.1　アルゴリズムの多重化

あるアルゴリズムを m 個同時に実行し，得られた解の最大値や最小値を結果として選択することをアルゴリズムの多重化と呼ぶことにする [3]．m は多重度と呼ぶ．分散アルゴリズムの場合，多重化されたアルゴリズムの実行は複数の通信内容を一つのメッセージに載せて送ることが可能になるため，メッセージ長は増加するがメッセージ数の増加は抑えることができる．分散アルゴリズムでは，計算時間の多くはメッセージ通信に費される．よって分散アルゴリズムでは，計算とメッセージを多重化することにより，多重実行による計算時間増加のインパクトを集中型アルゴリズムのそれよりも小さく抑えることが可能と考えられる．このため多重実行は分散アルゴリズムに，より適していると考えることができる．

多重実行された結果は，計算の最後に集めて，どの結果を選択するか決めなければいけない．得られた多数の結果から最善のものを選ぶという考え方は，遺伝的アルゴリズムに似た考え方でもある．しかし分散アルゴリズムでは，このような選択そのものもコストがかかるため，選択は一度であることが望ましいし，その結果の品質も保証されていることが望ましい．

3.2　最適解到達率の設定可能性

近似アルゴリズムを多重実行した場合，得られる解と最適解からの距離の差の確率分布は，多重化前のアルゴリズムの解の確率分布を $F_s(y)$ とすると，

$$F_m(y) = 1 - (1 - F_s(y))^m$$

となり，$F_m(y)$ は極値分布のワイブル分布になる．また，多重化後に得られる解の最適解との差の期待値は，

$$\mu(m) = m^{-h}\mu_s$$

となり，多重度 m のべき乗になる [3]．さらに多重化する前 ($m = 1$) のアルゴリズムの最適解到達率が P_{sopt} であるとき，多重化後の最適解到達率 $pmopt$ は，

$$P_{mopt} \quad = \quad 1 - (1 - P_{sopt})^m \tag{1}$$

で与えられる [4]．

上式を使うことで，多重化前の最適解への到達率が既知の場合，必要な多重度 m を計算することができる．

例えば多重実行することで最適解への到達率を 0.99 にしたい場合の m は,

$$1 - (1 - P_{sopt})^m \quad \geq \quad 0.99 \tag{2}$$

とすれば良いから，求めたい多重度 m は

$$m \quad \geq \quad \frac{-2}{log(1 - P_{sopt})} \tag{3}$$

となる．しかし P_{sopt} は通常は未知である．

本稿では，近似アルゴリズムの P_{sopt} が，おおよその値しか判明していない場合に，多重化により得られた解が最適値かどうかを判定する方法を検討する．

まず多重度 m による多重実行を，n 個同時に実行することを考える．よって全体の多重度は $m \times n$ になる．それぞれの結果は，3 パラメータのワイブル分布に漸近するので，その確率密度関数は

$$f_{3w}(x, m, \eta, \gamma) = \left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{m-1} \frac{m}{\eta} exp\left(-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^m\right)$$

となる．この確率密度関数の位置パラメータ γ が最適解の位置になる．ここで対数尤度関数

$$\ln\left(L_{3w}(x, m, \eta, \gamma)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{x_i-\gamma}{\eta}\right)^{m-1} + \ln\frac{m}{\eta} - \left(\frac{x_i-\gamma}{\eta}\right)^m \right)$$

を偏微分することで，最尤推定によるパラメータの推定は理論的には可能である．しかしこの式の最尤推定を数値計算により収束させるためには非常に多くのサンプルが必要になる [5].

ワイブル分布のパラメータの推定には，ワイブル確率紙を用いた方法もある．これは，ワイルブ分布の分布関数を次式のように変形し，

$$R(x) = 1 - F_{3w}(x, m, \eta, \gamma) = \exp\left(-\frac{x-\gamma}{\eta}\right)$$

対数を二回とることで次式を得る．

$$\ln\{-\ln(1 - F_{3w}(x, m, \eta, \gamma))\} = \ln\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)$$

この両辺を Y,X とみなしてワイブル確率紙にプロットし，そこからパラメータを読みとる．ただし F_{3w} の代わりに順序統計量の累積分布関数であるメジアンランクを使う．

パラメータ推定の第三の方法として，ベイズ統計を用いた推定がある．ベイズ統計では，事後分布 $\pi(\omega|D)$，尤度 $f(D|\omega)$，事前分布 $\pi(\omega)$ として，尤度にワイブル分布

$$f(x) = \alpha\beta(x-\gamma)^{\beta-1}\exp(-\alpha x^{-\beta})$$

を設定し，得られた結果から事前分布を計算する方法である．

4 実験

本方式の目的は，なるべく小さな m で多重実行し，最適解を推定することである．前述の推定方法について，実験により評価を実施した．最適解を求めるためのおおよその多重度を m とした場合，多重度 $m/3$ の実行を 3 つ実施し，この 3 つの結果から，得られた解が最適解かどうかを判定する実験を行なった．

実験にはあらかじめ最適解がわかっている問題を使い，多重化していない時の最適解到達率が判明しているアルゴリズムを用いた．

問題は DCOP 用の単純なグラフ彩色問題 (最小化問題) を使い，近似アルゴリズム DSA で解いた．この問題は，多重度 $m = 1$ の DSA で解いた場合，最適解到達率は 0.72，最適解到達率 0.99 のために必要な多重度は $m = 62$ である．

ここで上記の値がおおよそ判明しているという仮定のもと，$m = 20$ の多重度の実行を 3 つ同時に実施し，その結果を分析した．サンプル数が少ない場合，最尤推定は収束せず，パラメータを推定することができなかった．またワイブル確率紙を用いた推定でも，最適解の推定値は誤っていた．これは F_{3w} の代わりにメジアンランクの近似式を使ったのだが，サンプル数が不十分で誤差が大きくなってしまったためと考えられる．一方で，ベイズ統計を用いた場合，ワイブル分布のおおよその形状がわかっているという前提で他のパラメータを仮定した場合のみ，最適解の位置を推定することができた．

5 おわりに

本稿では分散制約最適化問題のための近似アルゴリズムを多重実行した場合に，最適解が推定可能であるかどうかを検討した．多重度を非常に大きくしなくても最適解は推定可能であったが，正確な計算を求めるためには多くのサンプルが必要であった．

(本研究は JSPS 科研費 xxxxxx の助成を受けたものです)

参考文献

[1] Pragnesh Jay Modi, Wei-Min Shen, Milind Tambe, and Makoto Yokoo. Adopt: asynchronous distributed constraint optimization with quality guarantees. *Artif. Intell.*, No. 161, pp. 149–180, 2005.

[2] Adrian Petcu and Boi Faltings. A scalable method for multiagent constraint optimization. In *IJCAI*, Vol. 5, pp. 266–271, 2005.

[3] 飯塚泰樹, 竹内郁雄. 分散制約最適化問題近似解法の多重実行の効果. 情報処理学会論文誌, Vol. 50, No. 12, pp. 3136–3149, 2009.

[4] Yasuki Iizuka. The optimal solution attainment rate of the multiplexing method. In *KES-AMSTA*, pp. 319–329, 2012.

[5] 道七田中, 達雄酒井. 3 母数ワイブル分布の母数推定について : 疲労寿命分布の母数推定に関連して). 材料, Vol. 28, No. 304, pp. 13–19, jan 1979.